Niveau(x) d'enseignement 5 Numéro EDUQ 9370294
Centre d'intérêt 841

Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre (1992 Université du Québec à Montréal)

Actes / du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre, 10 avril 1992, Cirade-Uqam, [Montréal]. -- Montréal : Uqam, Cirade, 1992.
116 p. : ill. ; 28 cm.

Bibliogr. à la fin des textes.

ISBN 2-921284-96-0

Vedette(s)-secondaire(s): Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire sur l'apprentissage et le développement en éducation

---

Descripteur(s): Algèbre * Raisonnement * Historique * Didactique * Résolution de problème * Arithmétique * Mathématiques * Compréhension * Secondaire (Ordre d'enseignement) * Postsecondaire (Ordre d'enseignement)

Les actes du colloque rassemblent des textes autour de la problématique de l'introduction de l'algèbre. Ces textes émanent d'équipes qui oeuvrent à l'intérieur d'un programme de recherche portant sur "l'émergence des raisonnements et représentations algébriques". Ces textes visent à clarifier les conditions de construction des raisonnements et représentations algébriques en relation avec les situations qui ont permis, ou permettent, leur émergence et leur développement et à caractériser ces raisonnements. Ils proposent, à cet égard, une analyse historique et didactique, abordent les volets de l'algèbre comme un outil de résolution de problème et le rapport que les élèves entretiennent avec les écritures algébriques. Ils analysent également la compréhension en mathématiques avec une attention particulière à l'algèbre. Une synthèse des discussions ayant eu lieu pendant le colloque termine le document.

Type de document

1370.794

CENTRE INTERDISCIPLINAIRE DE RECHERCHE SUR L'APPRENTISSAGE ET LE DÉVELOPPEMENT EN ÉDUCATION

cirade

Université du Québec à Montréal

9370294

Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre

10 avril 1992

CIRADE - UQAM
Novembre 1992

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION
Nadine Bednarz 5

CHAPITRES:

I GRANDES LIGNES DE L'ÉVOLUTION DE L'ALGÈBRE: DE LA PLURALITÉ À L'UNICITÉ
Louis Charbonneau et Jacques Lefebvre 7

II L'ALGÈBRE COMME OUTIL DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES: UNE RÉFLEXION SUR LES CHANGEMENTS NÉCESSAIRES DANS LE PASSAGE D'UN MODE DE TRAITEMENT ARITHMÉTIQUE À UN MODE DE TRAITEMENT ALGÉBRIQUE
Nadine Bednarz, Bernadette Janvier, Claudine Mary et André Lepage 17

III RAISONNEMENTS ARITHMÉTIQUES ET ALGÉBRIQUES DANS UN CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES: OBSTACLES ET DIFFICULTÉS DANS LE PASSAGE DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ALGÈBRE CHEZ DES FUTURS ENSEIGNANTS
Sylvine Schmidt 33

IV LE RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ÉCRITS: UN MODÈLE D'INTERACTION DE REPRÉSENTATIONS
Luis Radford 45

V DU TRAITEMENT DES FORMES À CELUI DES CONTENUS D'ÉCRITURES LITTÉRALES: UNE PERSPECTIVE D'ENSEIGNEMENT INTRODUCTIF DE L'ALGÈBRE
Gisèle Lemoyne, François Conne et Jean Brun 65

VI SUR LA COMPRÉHENSION EN MATHÉMATIQUES, AVEC UNE ATTENTION PARTICULIÈRE À L'ALGÈBRE
Anna Sierspinska 83

VII SYNTHÈSE DES DISCUSSIONS AYANT EU LIEU PENDANT LE COLLOQUE
Nadine Bednarz et Louis Charbonneau 111

INTRODUCTION

Nadine Bednarz
CIRADE
Université du Québec à Montréal

Les différents textes apparaissant dans cette publication collective sont issus d'un colloque réunissant, autour de la problématique de l'introduction de l'algèbre, les équipes œuvrant à l'intérieur d'un programme de recherche portant sur «l'émergence des raisonnements et représentations algébriques»[1].

De jeunes chercheur-es et étudiants-es, qui se sont joints aux travaux du groupe depuis deux ans, participaient également à la rencontre, ainsi que quelques collaborateurs, collaboratrices.

Cette rencontre visait avant tout à faire le point sur les travaux en cours, en regard des objectifs poursuivis dans ce programme et qui peuvent s'énoncer ainsi: «clarifier les conditions de construction des raisonnements et représentations algébriques en relation avec les situations qui ont permis, ou permettent, leur émergence et leur développement, et caractériser ces raisonnements».

Les textes rassemblés ici constituent un essai en ce sens. Les questions que nous nous posions sont ici éclairées par une analyse historique (cf. texte de L. Charbonneau, J. Lefebvre) et didactique, sous les volets de l'algèbre comme outil de résolution de problèmes (cf. textes de N. Bednarz, B. Janvier, C. Mary, A. Lepage; L. Radford; S. Schmidt) ou du rapport que les élèves entretiennent avec les écritures algébriques (cf. texte de G. Lemoyne, F. Conne, J. Brun). Une analyse plus globale en regard de la compréhension en mathématiques y trouve également sa place (cf. texte de A. Sierpinska).

Le lecteur ne retrouvera pas dans ces textes la présentation achevée de résultats de recherche, mais davantage une tentative de réponse aux questions posées, à la lumière des réflexions et questionnements issus des différents projets. Ceux-ci correspondent à l'état des travaux engagés par les différentes équipes.

Un court texte synthèse, faisant suite aux différents articles, permet par ailleurs de situer globalement les discussions ayant eu lieu pendant le colloque en regard des trois aspects suivants: un essai de caractérisation du raisonnement algébrique, une discussion sur les changements conceptuels nécessaires dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre et sur les situations didactiques susceptibles de permettre l'émergence de l'algèbre.

Ces réflexions, suscitées par les différents textes et la rencontre, ne constituent nullement un aboutissement mais doivent davantage être conçues comme une étape dans le processus de recherche en cours, point de départ éventuel de futures recherches.

---

1 Ce programme a reçu une subvention du Fonds FCAR pour 3 ans (1990-1993).

GRANDES LIGNES DE L'ÉVOLUTION DE L'ALGÈBRE: DE LA PLURALITÉ À L'UNICITÉ

Louis Charbonneau et Jacques Lefebvre
Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal

---

1. LA PLURALITÉ DES ALGÈBRES

Parler de l'émergence de l'algèbre implique qu'il y a **une** algèbre. Or historiquement l'existence d'une seule algèbre est une illusion. Dans l'histoire, il y eut plusieurs algèbres qui partagèrent des objectifs et des techniques mais qui néanmoins ne devraient pas être confondues les unes avec les autres.

Ces algèbres se différencient d'abord par les **objets** qu'elles traitent (éléments atomiques de base)[1], ensuite par leur **langage** respectif et enfin par leurs **modes de démonstration**.

1.1 Les objets

Chez Diophante et les Babyloniens, les objets sont numériques (N et Q^+). Chez les Grecs classiques, les objets sont géométriques (segments, surfaces). Chez les Arabes, les objets sont numériques, mais le numérique est différent. Il inclut de plus en plus les grandeurs irrationnelles (R^+). Chez les abaquistes (mathématiciens des XIV^e^ au XVI^e^ siècles qui dirigeaient des écoles destinées aux fils de marchands), l'algèbre est aussi numérique. Lorsqu'ils s'attaquent à des problèmes géométriques, ils les traduisent en termes de relations de types arithmétiques par le biais de la mesure. Chez Viète, les objets du raisonnement sont des espèces, c'est-à-dire des lettres, comme chez Descartes et Fermat. Par ailleurs, les objets atomiques de toutes ces algèbres se classent en deux catégories: les données et les inconnues.

Les algèbres varient aussi quant aux opérations sur ces objets atomiques. Il y a l'addition, la soustraction, la multiplication, la division pour les objets numériques, avec les limitations inhérentes aux ensembles N, Q^+ ou R^+. Chez les Grecs classiques, pour les objets géométriques, l'addition et la soustraction ont leur sens naturel alors que la multiplication et la division sont restreintes par des considérations sur la dimension. Chez Viète, les opérations semblent définies plutôt à partir de leurs propriétés relatives, mais la dimension des objets joue un rôle important, à l'image des opérations sur des objets géométriques. Descartes fera en sorte de libérer les opérations de cet héritage géométrique en donnant une représentation des opérations pour qu'elles soient fermées, le produit et le quotient étant de même dimension que les grandeurs sur lesquelles les opérations s'effectuent.

---

1 Nous entendons par objets les éléments qui servent de base aux raisonnements, c'est-à-dire l'inconnue et les paramètres des problèmes.

1.2 Les langages

Après avoir fait un certain nombre d'opérations sur des objets, on obtient ce que nous appelons ici des expressions et que le langage mathématique actuel appelle couramment des monômes et des polynômes. Sur ces expressions seront aussi définies des opérations. Dans le cadre des algèbres de nature essentiellement numérique, ces nouvelles opérations proviendront d'une extension par analogie des opérations sur les objets atomiques. L'addition, la soustraction et la multiplication seront relativement facilement étendues aux monômes puis aux polynômes. La division présente plus de difficultés. Chez les mathématiciens arabes tels as-Samaw'al, les règles algorithmiques de la division numérique seront finalement étendues dans le cadre d'une symbolisation basée sur une représentation des expressions sous forme de tableaux. Notons que cette arithmétique des expressions a pour but d'isoler l'inconnue, c'est-à-dire d'exprimer l'inconnue en termes d'opérations sur des objets connus (d'où le besoin d'opérations sur des expressions). Dans ce travail, les identités entre expressions deviennent vite un outil important permettant de diriger le calcul. Pour les algèbres à contenu géométrique, l'extension des opérations aux expressions se fait plus difficilement. Les analogies sont moins évidentes, entre autres à cause du rôle de la dimension des objets impliqués. Par ailleurs, la théorie des proportions y joue un rôle central. Il ne s'agit pas ici d'isoler l'inconnue mais bien de déterminer une construction qui, à partir de grandeurs connues, permette d'obtenir la ou les grandeurs au départ inconnues.

1.3 Les modes de démonstrations

Les algèbres se distinguent aussi par leurs modes de démonstration. Chez les Babyloniens, il n'y a aucune forme de démonstration. Chez Diophante chaque problème fait l'objet d'un raisonnement clairement décrit mais propre à chaque problème. Chez les Arabes, l'on trouve des raisonnements géométriques pour démontrer des procédures arithmétiques. Ces raisonnements sont essentiellement de deux formes: sous forme de puzzle comme dans le cas d'al-Khwarizmi (à partir d'un rectangle d'aire connue, construire un carré qui sera d'aire connue et dont le côté est formé de l'inconnue et d'une longueur connue), ou sous forme d'intersection de lieux géométriques (comme pour la résolution des équations cubiques par al-Khayyam). Des raisonnements de type puzzle se trouvent aussi chez Cardan. Par ailleurs, chez Viète, les raisonnements s'inscrivent dans une théorie des égalités intimement amarrée à la théorie des proportions.

2. L'UNICITÉ DE L'ALGÈBRE

Mais au-delà de ces différences, ces algèbres manifestent des **tendances communes**. Ces tendances s'actualisent dans les algèbres de Viète et Descartes qui englobent dans leurs techniques les algèbres antérieures et les dépassent. L'algèbre de Viète est l'aboutissement d'un processus évolutif dans lequel on retrouve trois tendances:

1) l'algèbre en tant que processus général,
2) l'algèbre en tant que langage dont les mots se désémantisent au profit d'une syntaxe formelle,
3) l'algèbre en tant que méthode analytique.

2.1 *L'algèbre en tant que procédé général*

2.1.1 *Délimitation et généralité des objets atomiques auxquels s'appliquent les règles*

La notion de généralité a évolué au cours des âges. Chez les Babyloniens, elle se perçoit à travers des recettes énoncées dans des cas numériques particuliers mais qui laissent sous-entendre qu'elles s'appliquent aussi aux autres problèmes similaires. Cette notion même de similarité se précise déjà chez Diophante. D'une part, Diophante limite très consciemment aux rationnels le domaine des solutions de ses problèmes[2]. Par ailleurs il précise davantage le niveau de généralité lorsqu'il commence la résolution de certains problèmes par un *diorismos*, c'est-à-dire par l'énoncé des conditions à l'intérieur desquelles la solution proposée fonctionne (en fait il s'agit par exemple de la condition, dans la résolution d'une équation du second degré, correspondant à un discriminant positif). Chez al-Khwarizmi, ces conditions se trouvent implicitement expliquées dans les preuves géométriques de ses «formules» de résolution. Le domaine d'applicabilité s'en trouve mieux cerné, incluant chez lui les grandeurs irrationnelles satisfaisant aux conditions. Le domaine d'acceptabilité des solutions ne s'étendra vraiment qu'au Moyen Âge lorsque, dans le cours de la résolution d'un problème, Antonio de' Mazzinghi (1370) accepte de considérer une solution négative qui lui permet d'arriver, à la fin du processus, à une solution entière positive. Plus tard (Cardan, 1543; Bombelli, 1573), des expressions comparables à nos nombres complexes seront aussi utilisées à l'intérieur d'un processus de résolution. Toutefois, dans ces cas, il importe de noter qu'il s'agit encore d'une acceptation timide car ces nouveaux objets mathématiques ne sont utilisés que parce qu'ils font partie intégrante d'un processus plus large et qu'ils permettent d'arriver à des solutions conformes au problème original, lesquelles solutions font partie du stock d'objets dont la nature n'est pas problématique.

2.1.2 *Règles universelles: similitude des règles pour différents problèmes*

Cette extension du domaine d'applicabilité découle de la présentation en des termes généraux des règles à la base des solutions proposées. Diophante donne des règles de manipulation, par exemple la règle des signes[3]. Sous-jacente dans la résolution des problèmes est l'utilisation d'identités fondamentales qui le guide dans le choix de la ou des variables qui serviront d'inconnue(s). Mais c'est à nouveau al-Khwarizmi qui le premier présente explicitement, avec ses règles d'al-jabr et d'al-muqabala, des règles à caractère vraiment général. Ces règles lui permettent de réduire à six le nombre de processus à suivre pour résoudre des problèmes de degré égal ou inférieur à 2, ce qui correspond aux 6 types d'équations $ax = b$; $ax^2 = b$; $ax^2 = bx$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, où a, b, c sont des nombres positifs, processus qui ne fonctionnent que lorsque les données du problème satisfont à certaines conditions (discriminant positif ou nul). Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'identification du domaine d'applicabilité de chacun des cas découle toutefois d'une vision géométrique des grandeurs, ce qui affaiblit la cohérence interne de l'algèbre d'al-Khwarizmi. Cette recherche de règles générales à partir desquelles il est possible de résoudre plusieurs problèmes d'un même

---

2 Les grandeurs irrationnelles étaient entrées dans le domaine mathématique avec les pythagoriciens, environ sept siècles auparavant. Diophante était tout à fait conscient des limitations qu'il s'imposait.

3 Il ne faut pas voir cette règle comme l'affirmation de l'existence de nombres négatifs, le «négatif» étant l'opération de soustraction et non une indication prédicative.

type par un même algorithme fleurira chez les abaquistes[4]. Après un certain temps, un peu d'ordre s'imposera pour limiter le nombre de cas. Aussi, après 1450, Pacioli et Chuquet reviennent à une algèbre semblable à celle créée par al-Khwarizmi mais sans démonstration. Ils réinterprètent les processus des abaquistes à la lumière de quelques règles générales[5]. Comme le dit Chuquet: «*Mais sur toutes ces règles dessus par excellence merveilleuse est cette règle des premiers* (ce que nous appellerions aujourd'hui les règles de l'algèbre élémentaire) *qui règle fait ce que autres font et fait d'autres et par dessus innumérables comptes d'une inestimable profondité. Cette règle est la clef, l'entrée et la porte des abîmes qui sont en la science des nombres*»[6]. C'est l'époque du développement d'un certain symbolisme. Pas immédiatement opérationnel, il se révèle à tout le moins utile par la concision qu'il amène car le symbolisme, même limité comme il l'était encore, permet de retenir facilement, en permettant une visualisation globale , les diverses étapes de résolution, au moins en ce qui concerne l'inconnue[7]. Notons qu'il correspond à un souci didactique qui, se manifestant au XV^e siècle, particulièrement après l'apparition de l'imprimerie, favorise l'usage de tableaux de toute sorte afin, disait-on, d'alléger le travail de la mémoire[8]. Viète va beaucoup plus loin et présente de façon systématique des règles qui reposent, en partie, sur les Notions communes d'Euclide, donnant ainsi à son algèbre une saveur axiomatique.

2.2 L'algèbre en tant que langage dont les mots se désémantisent au profit d'une syntaxe formelle

L'algèbre moderne, celle des structures, se caractérise par une focalisation exclusive sur les propriétés des opérations, laissant à la porte le sens intuitif qui a pu amener à postuler les définitions et axiomes de cette structure. Puisque le sens n'y est pas, les relations entre les différents objets doivent être clairement énoncées en spécifiant explicitement les propriétés des opérations. Cette façon de faire présente plusieurs difficultés. L'une d'elles semble être le sentiment du paradis perdu, en ce sens que les mathématiciens même après avoir accepté dans leur pratique quotidienne des objets apparemment démunis de sens continueront de tenter de leur donner un sens, et ce jusqu'au siècle dernier (et jusqu'à maintenant dans l'enseignement).

---

4 S'ajoutent alors à ceux d'al -Khwarizmi de nombreux autres cas. Maître Benedetto de Florence (1463) en aura au total 36 alors que Dardi de Venise en a 198. Dans ces catégories, les équations qui s'écrivent aujourd'hui $x^6 = bx^5 + cx^4$ sont considérées comme différentes de l'équation quadratique $x^2 = bx + c$, même si de toute façon la solution nulle n'est aucunement prise en considération.

5 Ils résolvent des problèmes géométriques mais après les avoir traduits en termes essentiellement arithmétiques.

6 Marre, A. (éd.), «La Triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien, *Bulletino di Bibliografi e di Storia delle Scienza Matematiche e fisiche*, 13(1889), pp. 593-659 et 693-814, voir p. 736.

7 Les opérations étaient désignées par des symboles. L'inconnue faisait aussi l'objet d'une symbolisation, contrairement aux paramètres qui eux étaient toujours simplement numériques. Cette symbolisation se résumait souvent à mettre en indice un nombre indiquant le degré auquel était élevé l'inconnue, comme par exemple 4^2 signifiait $4x^2$. La similitude de comportement calculatoire entre les paramètres et l'inconnue se trouvait de la sorte quelque peu camouflée.

8 Cette tradition pédagogique remonte au moins à la fin du XIII^e siècle avec Raymond Lull et sera développée par Pierre de la Ramée au XVI^e siècle. (Voir Mahoney, M. S., *The Royal Road: the Development of Algebraic Analysis from 1550 to 1650, with special reference to the work of Pierre de Fermat*, thèse Ph.D. (Princeton University) 1967, p. 165)

2.2.1 *Objets en perte de sens*

Ce mouvement de désémantisation se manifeste très tôt[9]. Le premier pas dans cette direction fut fait probablement par al-Khwarizmi[10]. Dans son *Traité de l'al-jabr et al-muqabala*, son algèbre sert essentiellement à la résolution de problèmes à caractère arithmétique, même s'ils sont parfois énoncés en termes géométriques. Les descriptions des méthodes de résolution sont conformes à ce caractère numérique. L'utilisation qu'il fait de la géométrie pour justifier ses procédés de résolution indique par ailleurs que les grandeurs qu'il considère ne sont pas de fait purement numériques. Enclenchant clairement un processus dialectique, al-Khwarizmi tente consciemment de construire une nouvelle science ni arithmétique ni géométrique mais qui aura des applications dans ces deux domaines. À partir de ce moment, voulant se libérer de l'un pour tomber sous l'emprise partielle de l'autre, les algébristes oscilleront entre deux pôles, et ce souvent à l'intérieur d'un même livre.

Dans ce travail de résolution, le langage géométrique présente des avantages. D'une part, il permet de représenter les grandeurs dans des figures où leurs propriétés relatives sont perceptibles. D'autre part, les raisonnements sur ces figures ne sont généralement pas tributaires de la ou des dimensions absolues des composantes de la figure. Qu'une figure soit grande ou petite importe peu dans la mise en évidence des relations entre les diverses composantes de la figure. Ainsi s'effectue un transfert de la généralité des raisonnements géométriques vers des raisonnements de nature davantage numériques. Chez un esprit élevé comme celui d'al-Khwarizmi, il s'agit même plutôt de raisonnements sur les grandeurs, indépendamment de leur nature numérique ou géométrique. L'application du langage géométrique à la résolution de problèmes présente toutefois des restrictions. La multiplication et la division ne sont pas des opérations fermées lorsqu'elles sont interprétées géométriquement. En effet, le produit de la mesure de la longueur de deux segments ne correspond pas à la mesure de la longueur d'un troisième segment mais bien à l'aire d'un rectangle. Ainsi, la somme d'un nombre et du produit de deux nombres ne semble pas faire de sens dans ce contexte puisqu'elle correspond à additionner des «pommes et des bananes». Remarquons que la multiplication vue comme addition répétée ne se confond pas à l'époque avec cette multiplication de deux grandeurs. Le produit d'un «nombre nombrant (naturel)» par une grandeur donne une grandeur de même nature. Une autre difficulté provient de ce qu'il est impossible de représenter une situation numérique où se retrouve le produit de plus de trois nombres. Ainsi la nature des problèmes pouvant faire l'objet d'une représentation géométrique demeure limitée. L'ambiguïté ne sera résolue qu'avec Descartes qui dans sa *Géométrie* (1637) se réfère à la mesure par rapport à une unité donnée. Il montre comment trouver géométriquement à partir de deux segments de mesure connue un segment dont la mesure corresponde au produit des mesures des deux segments donnés. Il fait de même pour la division. Ce n'est vraiment qu'à partir de Descartes que l'on peut parler d'une véritable bijection entre le domaine numérique et les segments d'une droite. Cette multiplication a l'avantage de mettre sur un même niveau le produit par un nombre nombrant et le produit de deux segments. Cela

9 Le présent paragraphe et les deux paragraphes suivants reprennent et développent deux paragraphes de l'article de Louis Charbonneau *Du raisonnement laissé à lui-même au raisonnement outillé: l'algèbre depuis Babylone jusqu'à Viète*, paru dans le *Bulletin AMQ*, décembre 1991-mars 1992, pp. 9 à 15, voir pp. 12-13.

10 Diophante se situe totalement dans le domaine numérique et de ce fait ne considère que des objets numériques. Nous pouvons donc dire qu'il ne participe pas directement au mouvement de désémantisation dont il est question dans cette section. Notons toutefois que les mathématiques grecques ont ressenti le besoin de cette désémantisation dans le cadre de leur recherche d'intégration de l'idée d'irrationnelle dans le champ mathématique. Pensons ici à Euclide du livre V (sur la théorie des proportions) qui fait une théorie des rapports en définissant ces derniers comme une «manière d'être de deux grandeurs», les grandeurs étant elles-mêmes des êtres éthérés, non définis, si ce n'est que par le fait d'être (selon une terminologie moderne) archimédiens, ce qui est une propriété de relation et non un statut ontologique.

n'est possible que parce que le produit effectué n'est pas celui de deux segments mais bien celui de deux mesures. Il y a clairement un passage très net vers une plus grande abstraction.

Le courant numérique, ou arithmétique, n'a pas à tenir compte de ces restrictions. Le produit de deux nombres est un nombre et il est possible de multiplier successivement autant de nombres que l'on veut. Toutefois cette liberté apparente se voit fortement contrebalancée par la pauvreté des représentations auxquelles l'algébriste numéricien a accès. Ainsi, celui-ci ne peut représenter les grandeurs que par des chiffres, chiffres qui fixent la valeur d'un nombre dès le moment où ils sont couchés sur le papier (ou sur un papyrus ou une tablette d'argile). Dès lors, la généralité des raisonnements n'est jamais complètement assurée et ses limitations deviennent difficiles à discerner et à exprimer d'autant plus qu'il n'y a pas de traces des étapes intermédiaires du calcul qui permettraient de percevoir clairement les analogies dans les modes de résolutions (les nombres résultant des opérations ne gardent aucune marque de ces opérations). Les mathématiciens qui s'inscrivent dans ce courant tenteront de surmonter ces difficultés. La tâche se révèle ardue comme le montre Luis Radford[11] dans son texte sur Diophante (c. III^{e} siècle), le plus grand des algébristes numériciens ou encore comme le laisse voir le besoin de l'usage des tableaux par as-Samaw'al[12]. Voici un autre exemple. Alors que l'opération de division est distincte de l'idée de fraction et encore plus du concept de rapport, leurs notations respectives en viendront à se confondre, au fur et à mesure de la prise de conscience de la similitude de leurs algorithmes de calcul. Longtemps, la manipulation des fractions sera considérée comme le premier pas vers le calcul algébrique, et ceci aussi bien chez les Arabes que chez les Européens du Moyen Âge. Mais ce n'est pas le lieu, ici, d'essayer d'écrire cette histoire des fractions, en particulier la fusion progressive de la fraction «mesure», de la fraction «rapport» et de la fraction «division»[13].

2.2.2 *Une syntaxe aux règles clairement énoncées*

Ce n'est que dans la dialectique entre les courants géométriques et numériques que petit à petit se révèle une certaine similitude des procédés. La méthode qui décrit cette similitude repose nécessairement sur la manipulation d'objets qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques. Suite à ce travail d'abstraction unificatrice sur un arrière-plan arithmético-géométrique, les nouveaux objets et «raisonnements» acquièrent la généralité des objets et raisonnements géométriques et la concision des représentations

---

11 Voir l'article de Luis Radford intitulé *Diophante et l'algèbre pré-symbolique*, paru dans le *Bulletin AMQ*, décembre 1991-mars 1992, pp. 73 à 80.

12 As Samaw'al écrit les expressions polynomiales sous forme de tableau. À chaque colonne de son tableau correspond une puissance de l'inconnue ou de l'inverse de l'inconnue, un peu à la manière d'un abaque. Partant de ce tableau, il peut aisément énoncer la règle de multiplication des diverses puissances de l'inconnue que nous formulons par $x^n x^m = x^{n+m}$, où n et m sont des nombres entiers positifs ou négatifs. En effet, pour multiplier une inconnue à une certaine puissance, disons au cube, par l'inverse de l'inconnue à une autre puissance, disons à la cinquième puissance, il suffit de placer le doigt sur la colonne de la première puissance, la troisième, puis de le déplacer vers la droite de 5 colonnes. Nous arrivons sur la colonne de l'inverse de l'inconnue au carré. Si j'ai à multiplier par une puissance de l'inconnue, et non de son inverse, je déplace mon doigt plutôt vers la gauche. Sans jamais parler d'exposant négatif, il peut ainsi énoncer une règle simplifiant grandement l'effort de raisonnement.

13 Cette identification semble à peu près acquise chez Viète qui note la division de deux grandeurs A et B par $\frac{A}{B}$. Il n'en demeure pas moins qu'elle n'est pas identique à la division par un «nombre nombrant».

numériques[14]. C'est peut-être ce que ressent Bombelli lorsqu'après avoir lu les *Livres arithmétiques* de Diophante, il transforme son *Algebra*, dont la rédaction était pourtant avancée, en y introduisant une notation nouvelle et en enlevant les problèmes à nette saveur mercantile. Dans ce contexte, il n'est donc pas surprenant de le voir accepter les nombres complexes et même les nombres négatifs. Ne cherchant pas un sens à tout prix, il se satisfait d'une existence algébrique basée uniquement sur des propriétés des nouveaux objets surtout que leur présence dans le raisonnement et les calculs n'est que transitoire[15].

L'introduction d'un symbolisme joue un double rôle. D'une part il prédispose à cette désémantisation dont il a déjà été question. Il en facilite l'acceptation par l'absence de référence à quelque problème que ce soit. Un x n'a en soi aucune connotation sémantique autre que de se prononcer «ixe», contrairement à un mot toujours chargé d'un certain poids sémantique. D'autre part, le symbolisme permet d'énoncer relativement simplement et avec concision des règles de manipulations et des opérations, ce qui accentue l'aspect algorithmique des raisonnements.

Viète sera particulièrement clair dans sa nouvelle algèbre sur les règles à suivre. Dans son *In artem analyticen Isagoge*, il décrit explicitement les différents types d'espèces et les propriétés des opérations sur les espèces. Dans ses manipulations, contrairement à ses prédécesseurs, il ne fait aucune distinction entre les espèces représentant des grandeurs connues et celles représentant des grandeurs inconnues, si ce n'est de représenter celles-là par des consonnes et celles-ci par des voyelles. Dans ses *Notae priores*, il présente les identités fondamentales qui seront nécessaires à la résolution des problèmes du *Zeteticorum libri quinque* ainsi que deux nouvelles opérations sur les triplets pythagoriciens. Dans son *De aequationum recognitione et emendatione*, il indique comment transformer une équation pour la ramener à une forme déjà «résolue» dans son *Zeteticorum libri quinque*. «Résolu» indique pour Viète que le problème a été transformé de telle manière qu'il puisse maintenant être abordé et vraiment résolu suivant la nature arithmétique ou géométrique du problème. Le *De numerosa potestatum ad exegesin resolutione tractatus* pour les problèmes arithmétiques et le *Effectionum geometricarum canonica recensio* pour les problèmes géométriques correspondent à cette dernière étape, le passage de la forme canonique à une forme propre à la nature du problème. Cette partie de la résolution d'un problème correspond à l'Exégétique ou Rhétique, et est de la sorte distinguée du Zététique qui est le coeur même de la méthode analytique de Viète, partie où l'algèbre symbolique joue le plus grand rôle[16].

La manipulation d'objets non sémantiques présente un inconvénient majeur. Comment peut-on être certain de la justesse des raisonnements dont ils sont des éléments essentiels? Comment prouver quelque chose sans se référer à un sens? La référence à la géométrie ne peut être qu'un palliatif. La solution moderne: un système axiomatique. Toutefois, au début de la Renaissance, le terrain n'est pas mûr en algèbre pour une approche axiomatique et encore moins pour une axiomatique désémantisée. Alors que les mathématiques ont encore un statut précaire, le soutien de la tradition jouera un rôle

---

14 Les derniers abaquistes, qui à parler strictement n'en sont pas car ils n'ont plus nécessairement de liens directs avec la classe des marchands, ont résolu de nombreux problèmes géométriques. Pour ce faire, ils considéraient les mesures des segments impliqués et de la sorte transformaient le problème en un problème numérique.

15 Voir Morse, Joann Stephanie, *The Reception of Diophantus "Arithmetic" in the Renaissance*, Thèse, Princeton, 1981, pp. 89 à 105.

16 Voir Lefebvre, Jacques, *Qu'est l'algèbre devenue? De Viète (1591) à aujourd'hui (1991), quelques changements-clefs*, paru dans le *Bulletin AMQ*, décembre 1991-mars 1992, pp. 27 à 32 et Morse, Joann Stephanie, *Opus cit.*, pp. 154 à 160.

important dans la confiance à accorder à la nouvelle approche qui s'élabore. Diophante a joué ce rôle pour Bombelli. Pour Viète, et de fait pour ses successeurs[17], l'algèbre non sémantique trouvera sa justification dans le fait qu'elle puisse être associée non plus à la résolution ponctuelle, cas par cas, de problèmes, mais à une méthode globale («Donner solution à tout problème») qui prend racine dans l'analyse géométrique grecque. L'argument d'autorité joue. Néanmoins, l'algèbre nouvelle va au-delà de cette source antique présumée. De fait, un changement fondamental dans le statut de la preuve prend place à partir du milieu du XVI^e siècle. À l'exigence grecque de fournir des preuves synthétiques succède une approche plus pédagogique où l'action de convaincre passe par un processus plutôt inductif reposant sur une certaine pratique (d'où le mot art employé en relation avec les mathématiques). Ce mélange de rigueur de l'analyse géométrique et d'une vision plutôt constructiviste de l'acte de convaincre débouchera sur une nouvelle analyse, qui, bien de son époque, s'organisera en une méthode.

2.3 *L'algèbre en tant que méthode analytique*

Partant d'un énoncé à prouver, l'analyste suppose vraie ou réalisée la propriété cherchée et, de là, étudie l'environnement de cette propriété pour bien identifier les éléments connus et inconnus et mettre en évidence d'autres propriétés qui, espère-t-on, sont vraies ou peuvent être rendues telles et à partir desquelles par une marche inverse, dite synthèse, on puisse démontrer la propriété cherchée. Il en va de même dans le cas d'un problème, si ce n'est qu'il s'agisse alors de construction plutôt que de propriétés.

À la lumière de cette lentille qu'est la description de la méthode analytique, l'on peut, comme l'a fait Viète, constater que les algébristes qui avaient un souci de justification ont de fait, peut être non consciemment, suivi un tel cheminement. Chez Diophante, les propriétés relationnelles sont énoncées en prenant pour résolu le problème, c'est-à-dire que les conditions du problème sont satisfaites par certaines grandeurs, connues ou inconnues. Dans les raisonnements géométriques d'al-Khwarizmi, lorsque la première figure est posée, de fait il lui attribue les propriétés qui caractérisent le problème. Par exemple, pour résoudre l'équation que nous écrivons à la façon moderne $x^2 + px = q$, où p et q sont des coefficients positifs, il considère au départ un rectangle de base $p + x$, de hauteur x, et d'aire q, comme si le segment de longueur x était déjà connu.

L'association entre l'algèbre et l'analyse géométrique avait été perçue par Ramus (1515-1572) dans un effort de reconstruire les mathématiques grecques en fonction de considérations pédagogiques. D'une part il a vu dans l'algèbre des abaquistes (algèbre cossique) une bonne façon de libérer la mémoire du besoin de retenir les étapes d'un processus de résolution en les visualisant de façon succincte. D'autre part, il a aussi remarqué que les raisonnements algébriques fonctionnaient analytiquement. Or ce raisonnement analytique est plus conforme à sa perception de l'enseignement des mathématiques comme devant reposer sur la pratique. Ainsi Ramus réécrit une partie des *Éléments* d'Euclide en remplaçant les preuves synthétiques par des exemples visant à convaincre le lecteur-étudiant de la véracité du théorème. L'on perçoit ici l'une des origines d'une réorientation des attentes face à la démonstration mathématique. Certes les mathématiciens ne pourront souscrire à des «preuves» de nature purement inductive comme dans le Euclide à la manière ramusienne. Toutefois de nouvelles avenues sont tout de même ouvertes.

[17] Voir Morse, Joann Stephanie, *Opus cit.*, pp. 77 à 187. Le programme analytique tel que présenté par Viète permettra à d'autres d'introduire en mathématiques, sans le besoin d'une trop grande justification, des objets non-sémantiques tels que les infinitésimaux.

Viète, à bien des égards disciple de Ramus, reprend l'analogie algèbre-analyse mais la pousse à un niveau à la mesure de son propre génie mathématique. Il mène l'analogie à terme en édifiant une méthode qui, de même que la méthode pédagogique de Ramus se veut universelle, permette de résoudre tout problème en mathématique. La méthode analytique de Viète possède aussi une autre caractéristique de l'approche de Ramus, l'homogénéité. Selon Ramus, en effet, une méthode ne doit traiter que des objets homogènes. Jusqu'alors l'algèbre puisait à la fois dans l'arithmétique et la géométrie. Avec Viète, l'algèbre devient homogène à la condition de bien séparer l'usage de l'analyse proprement spécieuse (Zététique et éventuellement Poristique), qui n'est ni arithmétique ni géométrique[18], des applications de cette analyse dans la résolution de problèmes de nature arithmétique ou géométrique (l'Exégétique ou Rhétique). Le lecteur moderne ne peut s'empêcher de faire un rapprochement entre Ramus et ses définitions d'arithmétique (*«art de bien compter»*) et de géométrie (*«art de bien mesurer»*) et Viète qui définit l'analyse comme la *«doctrine de bien trouver dans les mathématiques»*[19].

En bout de course, Viète présente une nouvelle algèbre qui historiquement procède de l'arithmétique et de la géométrie, mais qui du point de vue de la méthodologie les précède toutes les deux. Pouvant être appliquée à la résolution de problèmes géométriques aussi bien qu'arithmétiques, l'algèbre domine[20]. À preuve, à mesure que le XVII^{e} siècle avance, les standards de démonstration deviendront de moins en moins géométriques, préparant le terrain pour l'enfance dorée de l'«analyse» que sera le XVIII^{e} siècle.

3. CONCLUSION

Nous l'avons souligné, il serait illusoire de penser qu'il existe une seule algèbre et donc il est illusoire à notre sens de vouloir définir dans un cadre unique ce qui caractérise le raisonnement algébrique par rapport aux raisonnements arithmétique et géométrique. Toutefois, cette pluralité ne doit pas camoufler les mouvements de fond qui parcourent les diverses algèbres:

1) recherche d'une plus grande généralité et délimitation de l'étendue de cette généralité;
2) recherche d'un langage qui passe progressivement d'une focalisation sur les mots et leurs relations à un langage qui s'éloigne des mots élémentaires pour se concentrer de plus en plus sur la syntaxe, et ce parallèlement à un mouvement de désémantisation des mots élémentaires;
3) mouvement vers une autosuffisance des raisonnements algébriques, autosuffisance atteinte dans le cadre d'une approche analytique qui modifie, aux plans logique et psychologique, les attentes face à ce que devrait être une démonstration.

Ce sont dans ces mouvements de base que peuvent se déceler des caractéristiques du raisonnement algébrique.

---

18 De fait Viète se réfère à la théorie des proportions, mais cette théorie, même si présentée par Euclide dans le cadre de la géométrie, n'est pas de nature géométrique et représente le sommet de l'axiomatique grecque.

19 *Introduction à l'art analytique*, (version Vaulézard, 1630), Chap. I.

20 Les trois étapes de Descartes pour la résolution algébrique d'un problème géométrique nous font bien sentir la place de l'algèbre: *«Ainsi voulant résoudre quelque problemes, on doit d'abord le considerer comme déjà fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le construire, aussy bien a celles qui sont inconnües, qu'aux autres. Puis sans considerer aucune difference entre ces lignes connües, et inconnües, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui monstre le plus naturellement de tous en qu'elle sorte elles dependent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une mesme quantité en deux façons: ce qui se nomme une Equation; (...)»* (*La Géométrie*, 1637, p. 300)

L'ALGÈBRE COMME OUTIL DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES: UNE RÉFLEXION SUR LES CHANGEMENTS NÉCESSAIRES DANS LE PASSAGE D'UN MODE DE TRAITEMENT ARITHMÉTIQUE À UN MODE DE TRAITEMENT ALGÉBRIQUE

Nadine Bednarz, Bernadette Janvier, Claudine Mary, André Lepage
CIRADE
Université du Québec à Montréal

INTRODUCTION

Notre équipe de recherche s'est intéressée, en continuité avec les travaux qu'elle a réalisés dans le passé en arithmétique[1] à une des composantes essentielles de l'algèbre, comme outil de résolution de problèmes. Plusieurs raisons, que nous reprendrons ici pour situer davantage les préoccupations de l'équipe, motivent ce choix d'examiner dans un premier temps le développement de la pensée algébrique via ce volet (d'autres options seront en effet examinées à plus long terme par l'équipe[2]).

— La résolution de problèmes a joué un rôle important historiquement dans le développement de l'algèbre. Cette composante n'est donc pas négligeable. Les traces qu'est susceptible de nous fournir une analyse plus fine de ce développement historique, en relation avec les raisonnements utilisés, contribueront à nous fournir un premier indice potentiel des changements qui ont marqué la transition d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique, à travers les moyens mis en place pour résoudre les problèmes (cette partie de l'étude, conduite par d'autres membres du groupe, n'est toutefois pas celle que nous reprenons).

— L'analyse didactique que nous cherchons à conduire est complémentaire à cette dernière. Si l'on tient compte de l'expérience antérieure acquise par les enfants tout au long de leur scolarité primaire et au tout début du secondaire, la résolution de problèmes n'est pas un terrain vierge pour ces derniers. Elle apparaît à cet effet un domaine intéressant pour examiner les conflits-articulations possibles dans le passage d'un mode de traitement à l'autre, les deux résolutions (arithmétiques et algébriques) étant autant envisageables pour l'élève qui s'engage dans un nouvel apprentissage face à un problème spécifique donné.

---

1 Ces travaux nous ont amenées, depuis plusieurs années, à nous interroger sur la nature des problèmes présentés aux élèves en arithmétique, sur leur complexité en relation avec le sens des différentes opérations et la nature des relations impliquées. Ces travaux nous ont également amenées à mettre en évidence d'une part les différents facteurs susceptibles d'influer sur cette résolution: le domaine numérique, le contexte, la formulation... et, d'autre part, les stratégies spontanées développées par les élèves pour résoudre ces problèmes. Cette connaissance approfondie du domaine de la résolution de problèmes en arithmétique constituera une base essentielle dans l'analyse qui nous préoccupe ici de la transition arithmétique - algèbre au plan de l'apprentissage.

2 Ce choix ne signifie nullement qu'une telle approche soit nécessairement favorisée par l'équipe pour les débuts de l'apprentissage de l'algèbre. Elle constitue une option de recherche, qui doit être examinée au même titre que les autres (modélisation, généralisation de patterns numériques, géométriques...).

En nous attardant davantage aux *procédures de résolution des élèves*, et en essayant de caractériser les deux types de résolution (procédures arithmétiques et algébriques) qui, spontanément, peuvent apparaître en regard d'un problème spécifique donné, et ce qui les distingue, nous cherchons avant tout à repérer les «changements conceptuels» nécessaires dans le passage d'un mode de résolution arithmétique à un mode de résolution algébrique. Cette analyse permettra de mieux saisir en particulier la nature profonde des difficultés que les élèves rencontrent, lorsqu'ils abordent la résolution de problèmes en algèbre, dans le passage à un nouveau mode de traitement du problème[3].

Ces difficultés nous engagent, par ailleurs, à une *réflexion sur la nature des problèmes proposés aux élèves* dans chacun des deux domaines, en arithmétique et en algèbre, afin de mieux saisir leur complexité relative (catégories de relations, classes de problèmes...), et en particulier le passage qu'on exige de l'élève de la résolution de problèmes «arithmétiques» à la résolution de problèmes «algébriques» (progression, «sauts»).

Le projet de recherche (en cours), sur lequel nous reviendrons partiellement, reprend ces préoccupations.

La double analyse qui y est conduite des raisonnements des élèves en regard des problèmes permettra d'éclairer les «sauts» qui marquent le passage de l'arithmétique à l'algèbre, au plan de l'apprentissage, sous le volet résolution de problèmes, et le choix (à plus long terme) de situations et d'interventions didactiques pertinentes en ce domaine: sur quels problèmes, sur quels raisonnements cet apprentissage de l'algèbre peut-il s'appuyer, quels raisonnements doit-il au contraire contrer?...

LES CONSTATS que nous sommes à même d'amener, à cette étape de la recherche, s'appuient sur un examen des différentes procédures de résolution développées par les élèves en regard de problèmes «algébriques» et «arithmétiques». Cette analyse repose sur un corpus de données recueillies auprès d'étudiants(es) de secondaire III (14 - 15 ans), ayant déjà suivi un cours régulier d'introduction à l'algèbre, et sur des observations plus ponctuelles réalisées à différents niveaux scolaires[4]. Ces réflexions de l'équipe sur ce qu'est le raisonnement algébrique en comparaison avec le raisonnement arithmétique lors de la résolution de problèmes nous ont engagées parallèlement, nous l'avons dit précédemment, à une réflexion sur les problèmes proposés aux élèves (sur laquelle nous ne reviendrons que partiellement dans le cadre de cet article). Celle-ci prend ici appui sur un examen systématique des différents types de problèmes présentés en algèbre à différents niveaux scolaires, étude non restreinte aux manuels actuels, et des problèmes présentés, avant toute introduction à l'algèbre.

Nous reviendrons maintenant sur quelques-uns de ces résultats, susceptibles d'éclairer le passage arithmétique - algèbre dans l'apprentissage au plan de la résolution de problèmes.

---

3 Plusieurs recherches, sans s'arrêter à un questionnement profond quant à l'articulation et aux conflits entre ces deux modes de raisonnement, ont pointé les difficultés importantes que les élèves rencontrent à différents niveaux (Lochead, 1988; Kaput, 1983; Clément, 1982; Mayer, 1982), lorsqu'ils s'engagent dans la résolution de problèmes algébriques.

4 Celles-ci ont fait l'objet de maintes discussions au sein du groupe.

SUR LES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES: MODE DE PENSÉE ARITHMÉTIQUE ET MODE DE PENSÉE ALGÉBRIQUE: une première réflexion sur les procédures développées par les élèves (procédures arithmétiques et algébriques) en regard de différents types de problèmes, et sur ce qui les distingue.

Cadre de référence

L'analyse des raisonnements des élèves, permettant de caractériser un éventuel passage à l'algébrique, a souvent été conduite en regard du symbolisme utilisé: passage à l'équation, et difficultés associées à cette mise en équation (Lochead, 1988; Clément, 1982; Kaput, 1983...), ou traitement symbolique du problème (Harper, 1981). Ainsi, Harper distingue trois modes de résolution au problème suivant «montrez comment trouver deux nombres dont la somme et la différence sont données», un mode rhétorique qui consiste à donner la solution sous la forme d'instructions «ajoutez la somme et la différence et divisez par deux», une solution dite «diophantienne», dans laquelle des valeurs numériques sont choisies pour la somme et la différence, deux équations écrites et résolues, l'élève faisant alors l'assertion que la méthode s'applique à n'importe quels nombres... Enfin une solution «à la Viète» qui consiste à écrire x+y = a, x-y = b et à résoudre pour obtenir x = a+b / 2, y = a - b / 2 (a et b désignant deux nombres généralisés, et x et y les inconnues).

Or peut-on dire, sans nier pour autant l'importance du rôle du symbolisme, que cette évolution caractérise bien l'émergence ou le développement d'une pensée algébrique? L'histoire des mathématiques nous montre que le développement de l'algèbre a commencé bien avant que les quantités inconnues soient représentées par un symbole. Les quelques recherches conduites auprès d'élèves nous montrent par ailleurs que beaucoup d'entre eux, de l'école secondaire jusqu'à l'université, résolvent davantage les problèmes algébriques dans un style «abrégé» (langage naturel «syncopé») que symbolique (Kieran, 1989; Arzarello, 1991, ...).

Un examen attentif des procédures de résolution des élèves permet de repérer d'ailleurs des élèves qui font usage d'un symbolisme (à des fins de désignation), sans toutefois opérer sur celui-ci, ayant en fait recours par la suite à une procédure arithmétique et, par ailleurs des élèves ayant recours à un langage «syncopé» et traitant algébriquement le problème. La caractérisation des deux types de raisonnements, et de l'émergence d'une pensée algébrique, doit par conséquent dépasser cette utilisation ou non de lettres.

L'analyse des procédures de résolution des élèves que nous conduirons ne reprend pas cette perspective. L'accent n'y est pas mis sur une caractérisation des procédures arithmétiques et algébriques en regard de l'utilisation du symbolisme, *mais davantage en regard de la prise en compte que fait l'élève de l'information fournie dans le problème* (gestion des données connues et inconnues, et des relations entre celles-ci): comment le sujet s'engage-t-il dans la résolution du problème? Quel enchaînement de relations ce raisonnement met-il en place? Sur quelle réflexion sur les relations ce raisonnement s'appuie-t-il?...

Pour illustrer les constats auxquels nous arrivons, nous reprendrons quelques exemples de procédures utilisées dans la résolution de problèmes tirés de l'expérimentation.

DES PRISES D'INFORMATION, À DES FINS DE TRAITEMENT, TRÈS DIFFÉRENTES

L'analyse des procédures des élèves permet de pointer des distinctions importantes entre les deux modes de raisonnement (arithmétique et algébrique), dans la façon de gérer les données et les relations en œuvre dans le problème. Ces distinctions peuvent être retracées à travers les engagements respectifs des élèves dans le problème. Nous nous appuierons, pour expliciter ce qui précède, sur l'un des problèmes expérimentés[5], dont voici l'énoncé:

> «Il y a 588 passagers à transporter entre deux villes. On dispose de deux trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En supposant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des deux locomotives?»

- ***Les procédures arithmétiques*** vont en général s'articuler sur les ***données connues*** (ici les *deux* trains, le *tout*: les 588 passagers, *l'écart* entre le nombre de wagons d'un type et l'autre, et les «taux»: wagons à *16 places* et wagons à *12 places*), en essayant de créer des «ponts» entre celles-ci, *pour pouvoir opérer sur du connu.* La grandeur inconnue apparaît alors en fin de processus. Nous retrouvons là un des constats déjà exprimé dans Bednarz, Janvier (1991).

> «Les choses se passent dans tous les cas comme si l'élève se déplaçait en manipulant des valeurs connues, pour aller vers l'inconnu, qui constitue alors le point final du trajet emprunté par l'élève.»

Plusieurs types de procédures peuvent être retracées dans ce sens (correspondant à différentes façons pour l'élève de créer des ponts entre ces valeurs connues):

Procédures arithmétiques de type 1: procédures de type essais numériques

On fixe un nombre de départ (pour une des valeurs inconnues), un certain état, à partir duquel tout va pouvoir être reconstruit, par exemple le nombre de wagons pour le train formé de wagons à 12 places: 10.

On en déduit alors le nombre de wagons dans l'autre train (18), puis le nombre de passagers qu'il y aurait dans chacun des trains:

10 x 12 = 120 passagers 18 x 16 = 288 passagers

On calcule le nombre total de passagers, et on compare celui-ci au nombre fourni initialement (588):120 + 288 = 408 passagers (trop bas...). On recommence un nouvel essai...

---

[5] D'autres exemples, appuyant les mêmes constats, peuvent être repris dans le texte déposé en décembre 1991 (Bednarz, Janvier; 1991).

Procédures arithmétiques de type 2: procédures s'articulant sur un raisonnement sur les relations et transformations connues dans le problème

Deux types de procédures peuvent ici être distinguées (correspondant à deux points d'entrée dans le problème):

—procédure 2-a): *partage au départ* des passagers entre les deux trains pour obtenir le nombre de passagers dans chacun des trains, et *ajustement par la suite* pour tenir compte de l'écart entre le nombre de wagons dans chacun des trains.

Ex. 588 ÷ 2 = 294	(partage des passagers entre les deux trains)
294 ÷ 12 = 16	(calcul du nombre de wagons à 12 places à partir de cette première donnée)

ajustement tenant compte de l'écart:

16 + 8 = 24	(nombre de wagons dans l'autre train)
24 x 16 = 384	(nombre de passagers dans le train formé de wagons à 16 places)
588 - 384 = 204	(calcul du nombre de passagers dans l'autre train)
204 ÷ 12 = 17	(nombre de wagons à 12 places)

—procédure 2-b): *ajustement au départ de l'écart entre les deux trains* (passagers dans les 8 wagons en surplus) pour se ramener alors à deux trains ayant le même nombre de wagons.

Ex. 8 x 16 = 128 passagers	(nombre de passagers dans les 8 wagons de plus)
588 - 128 = 460 passagers	(en éliminant l'écart entre les deux trains, on se ramène à une situation où le nombre de wagons de chaque type est le même)

ou

—procédure 2-b-1)

460 ÷ 28 = 16.4 (deux trains, l'un formé de wagons à 12 places, l'autre de wagons à 16 places, correspondent à un seul train formé de wagons à 28 places)
Réponse: 17 wagons à 12 places, et 25 wagons (17 + 8) à 16 places

—procédure 2-b-2)

460 ÷ 2 = 230 (on partage équitablement les passagers entre les deux trains)
230 ÷ 12 = 19 (nombre de wagons à 12 places)
230 ÷ 16 = 14 (nombre de wagons à 16 places)
wagons à 12 places = 19
wagons à 16 places = 14 + 8 = 22 wagons (réutilisation de l'écart)

Ces dernières procédures (procédures de type 2) obligent, pour pouvoir opérer à une *restructuration complète du problème*: le problème et les relations qui lient les données doivent être transformés par l'élève en une nouvelle situation qui rend possible l'évolution des calculs. Sans une telle modification nécessaire (pour les procédures de type 2) ou sans l'opération qui consiste «à faire semblant» en se donnant un nombre fictif (procédures de type 1), puisqu'au départ aucun lien ne permet de relier directement les grandeurs connues fournies dans le problème, la procédure de résolution qui n'opère que sur du connu bloque.

Au contraire, les procédures algébriques *vont* faire appel à une *représentation globale* des relations entre les données (n'exigeant pas en général une restructuration complète du problème) qui doit être *investie dès le départ*. Cette représentation de la situation et les calculs ne progressent donc pas, comme c'est le cas dans le traitement arithmétique, en parallèle. Ce type de gestion des données *distingue clairement le traitement algébrique* du traitement arithmétique qui lui s'appuie (procédures de type 2 surtout) sur différentes transformations successives des relations en présence.

Exemple de ***procédure algébrique illustrant ce qui précède***

1er x.12
2e (x + 8).16
588 = x.12 + (x + 8).16

(une représentation des relations entre les données est investie dès le départ, sans modification de la structure du ploblème)

588 = 12x + 16x + 128
-12x-16x = 128-588
-28x = -460
28x = 460
x = 16,42
1er 16,42 x 12 = 197,04 (vérification)
2e (16,42+8) x 16 = 390,72

Cet engagement totalement différent de l'élève dans le problème, d'une pensée de style synthétique (aboutissant en dernier ressort à la chose cherchée) à une pensée de style analytique (qui suppose que la chose cherchée est obtenue, pour de là considérer ce qui dérive de celle-ci...) *est fondé sur un élément qui ne se trouve pas dans l'arithmétique, l'acceptation d'insérer dans les calculs la quantité que l'on cherche* (la quantité inconnue)[6].

DES TRAITEMENTS QUI PRÉSENTENT, EN CONSÉQUENCE, AUSSI DES DISTINCTIONS IMPORTANTES

• L'analyse des procédures précédentes nous montre que cet engagement de l'élève face au problème, pour pouvoir opérer, sollicite une réflexion différente de part et d'autre:

— Le chemin emprunté par l'élève en arithmétique qui fait appel à une restructuration du problème (procédures arithmétiques de type 2), oblige à un *contrôle sémantique* constant sur la séquence d'opérations effectuée, et va exiger *en conséquence* un *contrôle très grand* des grandeurs par l'élève.

---

6 Cette rupture importante entre le mode de pensée arithmétique et algébrique avait déjà été mis en évidence dans (Bednarz, Janvier; 1991). Nous allons toutefois plus loin, en proposant une interprétation en termes de représentation, de gestion différente des relations mises en œuvre dans le problème.

Ainsi, dans le problème précédent, le sens de la relation (implicite) qui lie les deux types de grandeurs en présence: nombre de wagons et nombre de passagers, relation qui ne peut être établie que par l'intermédiaire des «taux» fournis dans l'énoncé, doit être *gardé sous contrôle* à différentes étapes du raisonnement. La relation entre le nombre de wagons dans chacun des trains doit de plus être clairement visualisée, l'élève devant contrôler son impact sur chacune des données (nombre de wagons de chacun des trains, nombre de passagers).

Exemple:

(procédure 2-a) 294 ÷ 12 = 16	(En amorçant d'abord cette division, l'élève montre un certain contrôle de la situation),
(procédure 2-b) 8 x 16 = 128 passagers	(démontre un très bon contrôle et du taux et de la relation entre les deux trains),
(procédure 2-b-1) 460 ÷ 28 = 16	(imaginer un seul train à 28 places *fait preuve* d'un contrôle sémantique très grand de la situation).

La séquence d'opérations effectuée, dans la procédure arithmétique, est donc très liée aux grandeurs et au contexte.

— *Au contraire*, la résolution algébrique qui fait davantage appel à une représentation globale du problème, investie dès le départ, va conduire à un traitement différent des données, à partir de la modélisation que l'élève établit des relations en présence (sous forme en général de l'équation[7]).

À partir de celle-ci, *les calculs algébriques vont* en effet souvent *évoluer de façon autonome*, sans recours à un contrôle sémantique sur la situation et les grandeurs (les opérations effectuées obligent à un détachement *des grandeurs et du contexte*...)

On ne pourrait par exemple (procédure algébrique précédente) interpréter les égalités
$-12x - 16x = 128 - 588$
$-28x = -460$ dans le contexte du problème.

Cette distance nécessaire qu'on prend vis-à-vis du problème au profit des calculs algébriques ne permet pas de vérifier en cours de route si les résultats obtenus sont fiables en regard du problème. Une démarche doit être faite pour *réinterpréter* les résultats provenant de ce calcul symbolique. Ce retour au contrôle sémantique du problème à la fin de la résolution n'est pas toujours fait par les élèves comme en témoigne la réponse fournie à la procédure précédente (16,42) n'ayant aucun sens en regard du problème posé.

• *Dans ce traitement*, le raisonnement s'appuie de plus sur une réflexion différente sur les grandeurs (nous reviendrons là-dessus par la suite): ***un raisonnement en termes d'états versus un raisonnement en termes de changements.***

Le raisonnement algébrique *consacre les états*, faisant reposer son engagement sur la (ou les) données inconnues qu'elle fixe au départ pour établir les relations. Au contraire, le raisonnement arithmétique (de type 2) est appelé à travailler en termes de *relations* entre ces grandeurs ou de transformations de ces grandeurs. Dans le premier cas (raisonnement algébrique), l'élève ne doit pas garder tracer constamment dans son raisonnement des relations et transformations, celles-ci sont fixées dès le départ. Dans l'autre cas, l'absence

7 Bien qu'on puisse ici imaginer d'autres formes de modélisation (schémas, graphiques...)

de ponts entre les grandeurs connues fournies dans le problème (qui permettrait à l'élève d'opérer sur du connu) va le conduire soit à se *fixer un état de départ* (procédures de type 1: essais numériques plus ou moins systématiques) et là aussi à raisonner en termes d'états, soit à travailler en *termes de relations et transformations* (procédures de type 2).

Ces résultats permettent donc de pointer des différences fondamentales, à différents niveaux, entre les «bases» qui sous-tendent un mode de raisonnement arithmétique (à l'intérieur desquels, il est déjà possible de pointer certaines différences) et un mode de raisonnement algébrique.

Ils débouchent sur la question didactique importante:

L'ALGÈBRE, EN TANT QU'OUTIL DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES, EST-IL UN MODE DE PENSÉE QUI S'INSCRIT EN TRANSITION DOUCE AVEC L'APPRENTISSAGE DE L'ARITHMÉTIQUE (MODE DE TRAITEMENT ARITHMETIQUE DES PROBLÈMES) OU EN RUPTURE AVEC CELUI-CI?

Cette question nous renvoie bien sûr à une analyse des raisonnements impliqués pour un même problème (analyse précédente), mais aussi à une réflexion sur les problèmes proposés de part et d'autre (type de problèmes, nature des relations impliquées...).

Sans revenir ici sur l'analyse systématique faite par l'équipe sur ces problèmes, et sur la grille globale graduellement mise au point à cette fin, nous essaierons d'expliciter sur un exemple à la fois les distinctions qui doivent être opérées par l'élève au niveau des problèmes et des raisonnements. L'analyse permettra de revenir sur les distinctions mises en évidence précédemment et débouchera sur un questionnement, et des éléments de réponse, quant au passage arithmétique - algèbre au plan de l'apprentissage, via le volet résolution de problèmes.

La structure générale d'un problème[8] met en relief des grandeurs, connues et inconnues, et des liens qui existent entre ces grandeurs. Ces liens sont fournis explicitement dans l'énoncé du problème, ou implicitement et doivent alors être reconstruits par l'élève (à l'aide des données fournies ou de connaissances autres, préalables à la résolution[9]).

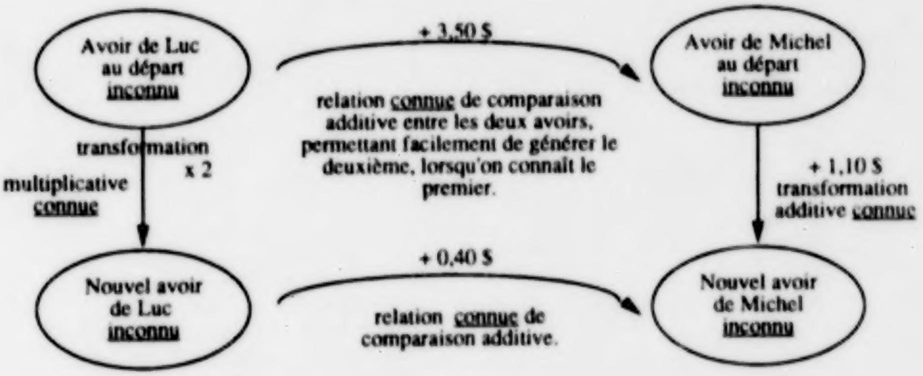
Une analyse des liens mis en œuvre dans le cas du problème de Luc et Michel (voir note 9) met en évidence deux types de relations: une relation de type *comparaison* «additive» entre deux grandeurs (avoir de Luc et avoir de Michel), qui se retrouve exprimée à deux moments différents dans le temps (relation entre les avoirs au départ, et relation entre les avoirs à la fin après transformation); un autre type de lien entre les grandeurs est défini par l'intermédiaire cette fois d'une *transformation* de la quantité de départ (avoir de Luc, et avoir de Michel). Cette transformation (multiplicative ou additive) opérée sur une grandeur donne naissance à un nouvel état (avoir de Luc, et de Michel après modification).

---

8 Le problème sur lequel nous appuierons plus particulièrement notre analyse est le suivant: «Luc a 3,50 $ de moins que Michel. Luc double son montant d'argent, tandis que Michel augmente le sien de 1,10 $. Maintenant Luc a 0,40 $ de moins que Michel. Combien Luc et Michel avaient-ils chacun au départ?».

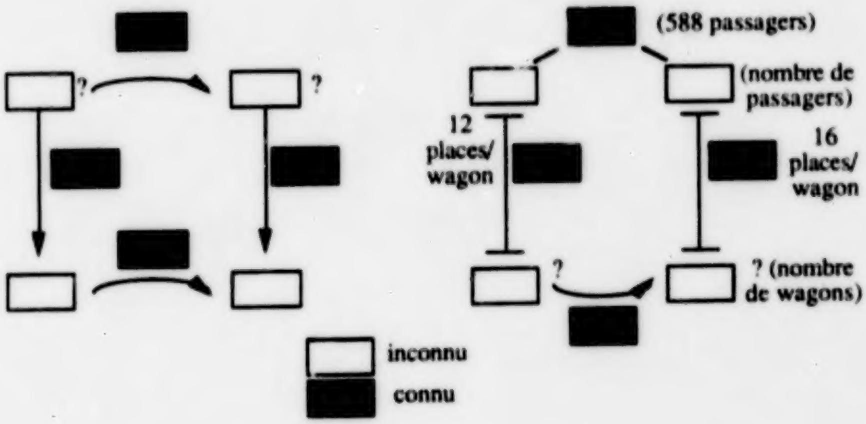
9 Le problème précédent (problème des trains) faisait appel à de telles connaissances pour pouvoir expliciter le lien entre le nombre de passagers et le nombre de wagons: Nombre de passagers = (Nombre de passagers/wagon) x Nombre de wagons.

Nous pouvons illustrer la structure générale du problème présenté (nature des relations entre les données, enchaînement de ces relations...) par le schéma suivant:



Ce schéma permet vite de caractériser le problème proposé et la difficulté qu'il va présenter pour l'élève: aucun pont ne peut en effet être jeté entre deux données connues (les relations et transformations relient des quantités inconnues), et le connu s'exprime ici de plus en termes de ***relations*** et ***transformations***, et non en termes d'une mesure de grandeur.

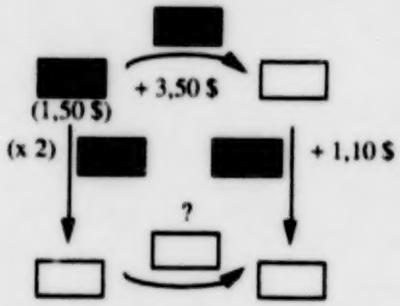
Les schémas de structure des problèmes de Luc et Michel, et du train rendent compte de la difficulté pour l'élève de créer des ponts dans ces situations entre les données connues.



Nous retrouvons là une des *caractéristiques* esssentielles *des différents problèmes présentés en algèbre*: problèmes que nous qualifierons de *«déconnectés»*.

D'autres énoncés, issus du même contexte, et qui pourraient fort bien être présentés dans le cadre de l'*arithmétique*, permettront de mieux saisir ce qui distingue les problèmes qui se résolvent facilement par un raisonnement arithmétique, et les problèmes précédents[10].

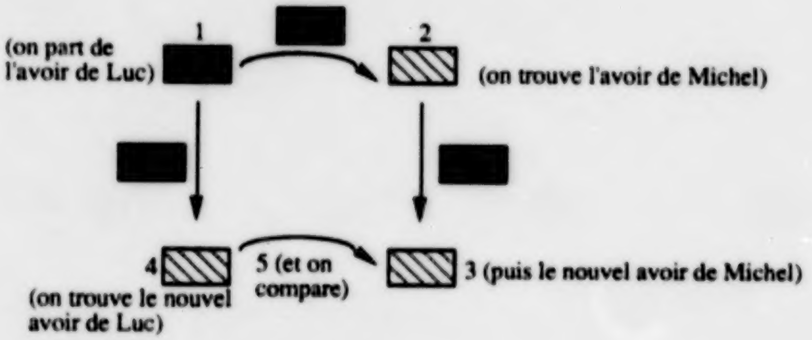
Variante 1: «Michel a 3,50 $ de plus que Luc. Luc double son avoir, tandis que Michel augmente le sien de 1,10 $. Si on sait que Luc avait au départ 1,50 $, combien Michel a t-il maintenant de plus que Luc?»



On voit bien sur ce schéma que des ponts existent entre deux données connues, permettant à l'élève de s'engager facilement dans une résolution, en opérant sur du connu pour aboutir en fin de processus à l'inconnu.

La résolution est ici directe et procède par étapes successives:

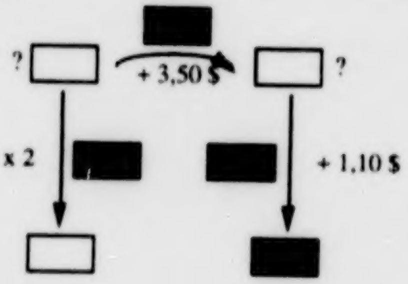
1,50 $ + 3,50 $ = 5, 00 $; 5,00 $ + 1,10 $ = 6,10 $ et 1,50 $ x 2 = 3,00 $. L'écart entre les deux avoirs à la fin est donc de 3,10 $.

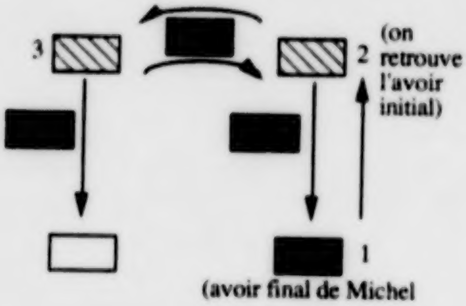


---

10 Attention, cela ne signifie nullement qu'on ne pourrait retrouver de tels problèmes «déconnectés», généralement présentés en algèbre, dans le cadre de l'apprentissage de l'arithmétique, et que ceux-ci ne puissent pas se résoudre par l'arithmétique.

Variante 2: «Michel a 3,50 $ de plus que Luc. Luc double son avoir, tandis que Michel augmente le sien de 1,10 $. Si on sait qu'à la fin Michel a 5,00 $, quels étaient les avoirs de Luc et Michel au départ?»





Par transformation inverse / et relation inverse, en partant du connu, l'élève peut là encore aboutir à la grandeur recherchée.

L'analyse précédente quant à la nature des relations impliquées, dans un cas (variantes 1 et 2) et dans l'autre (problème initial de Luc et Michel) permet de mieux saisir ce qu'on exige de l'élève dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, au niveau de la résolution de problèmes:

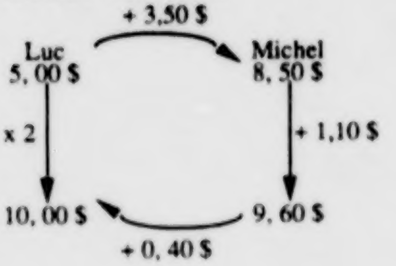
En arithmétique, les problèmes généralement présentés[11] à l'élève sont des problèmes que nous qualifierons de «connectés» (une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique).

En algèbre, les problèmes généralement présentés (voir note 12) à l'élève sont des problèmes que nous qualifierons de «déconnectés» (aucun pont ne peut être établi entre des grandeurs connues directement).

La question qui se pose est alors de savoir ce que va faire l'élève dans ce dernier cas? Ces problèmes «déconnectés», généralement présentés en algèbre, peuvent être résolus, nous l'avons vu précédemment (au problème des trains) autant par recours à un raisonnement arithmétique qu'algébrique. La grille d'analyse des problèmes permet de jeter un regard nouveau sur ces raisonnements. Reprenons-les pour le problème de Luc et Michel, en illustrant les raisonnements suivis à l'aide du schéma.

11 Ceci ne veut pas dire, rappelons-le, que certains problèmes «déconnectés» ne soient pas déjà présentés à l'élève dans le cadre de l'arithmétique. Ceci apparaît toutefois, dans l'examen que nous avons fait des manuels actuels, assez rare.

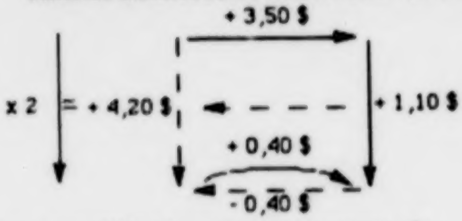
1. PROCÉDURES ARITHMÉTIQUES DE TYPE ESSAIS NUMÉRIQUES / OU FAUSSE POSITION:



L'étudiant utilise ici une procédure de type «fausse position[12] (il se donne au départ un certain montant 5,00 $ pour Luc). Constatant alors un écart de 0,40 $ de plus, il doit avoir 0,40 $ de moins...». Il baisse alors son point de départ 5,00 $ de 0,80 $.

Dans cette procédure, l'élève *se donne un état initial* pour pouvoir opérer. Sa procédure fait alors en sorte de ramener le problème de départ qui était «déconnecté» en en problème qui devient «connecté», sans en changer la structure (les relations en présence étant toutefois ici bien maîtrisées).

2. PROCÉDURES ARITHMÉTIQUES S'ARTICULANT SUR LES RELATIONS ET TRANSFORMATIONS CONNUES (INDÉPENDAMMENT DES ÉTATS)



«Michel a 3,50 $ de plus que Luc au départ. Il ajoute 1,10 $, ça fait 4,60 $ de plus. Si on dit qu'à la fin Luc a 0,40 $ de moins... si tu soustrais 0,40 $, ça fait 4,20 $ de plus qu'au départ. C'est le montant que Luc avait au départ, car il a doublé».

Il y a *modification de la structure du problème* pour pouvoir opérer sur du connu: l'élève raisonne *sur des relations* et des *transformations*, indépendamment des états, traitant celles-ci comme des entités en soi; il trouve la résultante et raisonne sur les deux transformations équivalentes (+4,20 $ et x 2).

L'élève *transforme ici le problème* en une *nouvelle configuration d'ensemble* «connectée». Ce raisonnement oblige à une *décentration des états* au profit des relations et transformations[13].

---

12 Au sens strict, la procédure «fausse position» est définie pour les problèmes multiplicatifs.

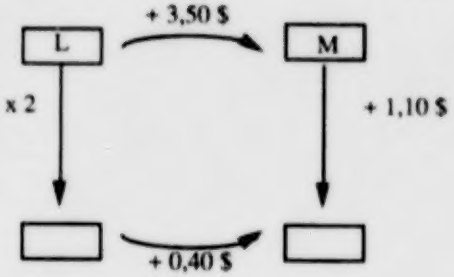
13 Nos recherches réalisées en arithmétique nous montrent justement les difficultés qu'ont les enfants à agir à ce niveau, et à opérer en termes de relations et transformations indépendamment des états intermédiaires auxquels ceux-ci donnent naissance (voir Bednarz, Janvier, 1989, 1991; Poirier, Bednarz, 1991).

3. PROCÉDURE ALGÉBRIQUE

M= L + 3,50
2 x L/ M+1,10
2 x L + 0,40 = M + 1,10
2 x L + 0,40 = L + 3,50 + 1,10

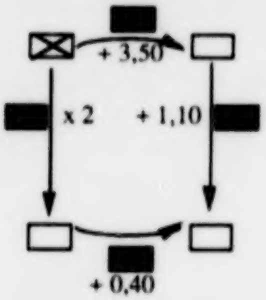
2 L + 0,40 = L + 4,60

L = 4,20
M= 4,20 + 3,50 : 7,70 $
L= 4,20 : 4,20 $



En opérant sur les quantités inconnues (ici désignées par L et M) comme si elles étaient connues, le raisonnement algébrique se trouve lui aussi à «connecter» le problème. Il n'y a donc pas nécessité de modifier la structure. Les états de départ sont en quelque sorte fixés, non pas par un nombre fictif (comme dans le raisonnement essais numériques ou fausse position) mais par un symbole qui désigne cet état (quelqu'il soit). Le raisonnement se trouve donc lui aussi à *consacrer les états*.

Nous reprendrons chacun de ces raisonnements sur les schémas, afin de mieux saisir les ressemblances et différences entre chacun d'entre eux pour un même problème. Cette analyse permettra de déboucher sur un questionnement quant au passage possible d'un raisonnement à l'autre dans l'apprentissage: sur quels raisonnements, le raisonnement algébrique peut-il s'appuyer? Quels raisonnements doit-il au contraire contrer?

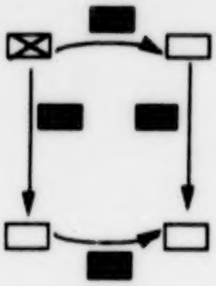


1. *Raisonnement arithmétique de type essais numériques / fausse position*

En fixant un état de départ, l'élève ramène le problème à un problème «connecté».

2. *Raisonnement arithmétique sur les relations et transformations.*

Il y a transformation ici du problème en une nouvelle configuration



3. *Raisonnement algébrique (utilisation ici d'une inconnue)*

On fixe l'état de départ par un x, et on «connecte» le problème

SUR LE PASSAGE DU RAISONNEMENT ARITHMÉTIQUE AU RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE: QUELQUES CONSIDÉRATIONS DIDACTIQUES

- L'analyse précédente montre clairement que le *raisonnement de type essais numériques ou fausse position est plus près du raisonnement algébrique (s'articulant sur une inconnue) dans la gestion qu'il fait des données*: on fait «comme si» dans les deux cas (on connecte par un nombre qu'on ajuste dans la procédure essais numériques, par un x dans la procédure algébrique), et dans les deux cas, l'élève parcourt le schéma «linéairement» (aucune modification n'est nécessaire). Ceci semble nous indiquer qu'une approche de l'algèbre pourrait peut-être s'articuler avantageusement sur ces raisonnements mis au point spontanément par les enfants. *Toutefois l'émergence de l'algèbre passe ici par l'acceptation* de considérer au départ la quantité *inconnue*, quelle qu'elle soit (sans la fixer par un nombre donné), et par *l'acceptation d'opérer sur cette inconnue*.

De plus dans le premier cas (essais numériques / fausse position), la trace des *opérations* successives disparaît au profit des calculs et résultats. Dans le second cas, on garde trace de l'ensemble des opérations avant de s'engager dans une résolution (qui met alors en jeu un registre différent, détaché des grandeurs et de la situation...).

Articuler une approche de l'algèbre sur ces raisonnements arithmétiques spontanés supposerait donc un détachement des résultats/calculs successifs au *profit d'une trace des éléments essentiels* (opérations et relations) à mettre en place pour obtenir ces calculs successifs.

Il n'est pas sûr que les recherches conduites en ce sens (approche numérique à la résolution de problèmes algébriques) qui proposent une introduction de l'algèbre, s'articulant sur ces procédures essais numériques mises au point spontanément par les enfants, reprennent cette préoccupation.

- Quant au deuxième type de raisonnement arithmétique (s'articulant sur, et exigeant *une très grande maîtrise* des relations et transformations), où l'élève est conduit à penser en termes de changements, il apparaît davantage éloigné du raisonnement algébrique. L'analyse précédente nous montre en effet que la résolution algébrique «colle» au schéma de structure du problème, et consacre en cela les états. Alors que dans l'autre cas, la résolution arithmétique doit *modifier le schéma* de structure du problème, pour pouvoir opérer, et est en conséquence amenée à travailler en termes de relations ou changements, indépendamment des états.

Un tel raisonnement arithmétique (poussé à l'extrême au niveau d'un apprentissage) peut donc en fait apparaître comme *un obstacle* au passage au traitement algébrique des problèmes. Ce passage à un mode de traitement algébrique du problème obligerait, dans ce cas, à une complexification des problèmes présentés à l'élève (rendant le raisonnement arithmétique de plus en plus difficile à appliquer), mais surtout à la mise en place d'une *représentation davantage globale* du problème par l'élève avant toute résolution (l'accent devant alors être davantage mis sur une modélisation des relations en présence que sur une résolution). Ce travail viserait à éloigner l'élève d'une résolution immédiate au profit d'une réflexion sur la structure du problème (puisqu'il y a ici maîtrise très grande par l'élève des relations, il s'agit de mettre celles-ci à profit dans un sens différent).

Nous terminerons ces considérations didactiques, sujettes bien sûr à discussion, par une question qui demeure ouverte:ce dernier type de raisonnement ne préparerait-il pas davantage l'élève à penser en termes de changements et de variation, et tout en étant un obstacle à la résolution de problèmes se traduisant par la forme statique de l'équation, ne serait-il pas un préalable important à une autre forme de la pensée algébrique (en tant qu'étude de relations entre des quantités qui varient, et modélisation de situations fonctionnelles)?

Bibliographie

Arzarello, F. (1991). Procedural and Relational Aspects of Algebraic Thinking. *Proceedings of the Fifteenth PME Conference. (International Group for the Psychology of Mathematics Education), 1*, Assisi, Italy, pp. 80-87.

Bednarz, N., Schmidt, S., Janvier, B. (1989). *Problème de reconstruction d'une transformation arithmétique*. Rapport F.C.A.R. et annexes, Cahiers du CIRADE, Université du Québec à Montréal, août, 121 pages.

Bednarz, N., Janvier, B. (1991). Illustrations de problèmes mathématiques complexes mettant en jeu un changement ou une séquence de changements par des enfants du primaire. *Proceedings of the Fifteenth PME Conference. (International Group for the Psychology of Mathematics Education), 1*, Assisi, Italy, June, pp. 112-119.

Bednarz, N., Janvier, B. (1991). *Émergence des raisonnements algébriques: un essai de caractérisation des sauts conceptuels qui marquent le passage à un mode de pensée algébrique*. (Texte de réflexion en vue de l'élaboration du colloque du groupe de recherche sur l'algèbre). Cahiers du CIRADE, Université du Québec à Montréal, 14 pages.

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C., Radford, L. (1992). Aritmetica y algebra como utiles de resolucion de problemas: transiciòn o ruptua? Proceedings 6e Reunion centro-americana y del Caribe sobre formacion de Professores e Investigacion en Matematica Educativa. Mexico. Julio.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., Lepage, A. (1992). Arithmetical Thinking and Algebraic Thinking in Problem Solving. *Proceedings of the Sixteenth PME Conference. (International Group for the Psychology of Mathematics Education), 1*, New Hampshire, August 7–11, pp. 65-72.

Clement, J. (1982). Algebra word problems solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, pp. 16-30.

Kaput, J. (1983). Errors in translations to algebraic equations: roots and implications. *Focus on learning problems in Mathematics, 5*, pp. 63-78.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. *Proceedings of the Thirteenth PME Conference. (International Group for the Psychology of Mathematics Education), 2*, Paris, pp. 163-171.

Lochead, J., Mestre, J. (1988). From words to algebra: mending misconceptions. The ideas of algebra, K-12, *NCTM Yearbook*.

Mayer, R.E. (1982). Memory for algebra story problems. *Journal of Educational Psychology, 74*(2), pp. 199-216.

Poirier, L., Bednarz, N. (1991). Étude des modèles implicites mis en œuvre par les enfants lors de la résolution de problèmes complexes mettant en jeu une reconstruction d'une transformation arithmétique. *Proceedings of the Fifteenth PME Conference. (International Group for the Psychology of Mathematics Education), 1*, Assisi, Italy, June, pp. 185-190.

RAISONNEMENTS ARITHMÉTIQUES ET ALGÉBRIQUES DANS UN CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES: OBSTACLES ET DIFFICULTÉS DANS LE PASSAGE DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ALGÈBRE CHEZ DES FUTURS ENSEIGNANTS

Sylvine Schmidt
CIRADE
Université du Québec à Montréal

INTRODUCTION

Les questions touchant l'émergence d'une pensée algébrique et le passage dans l'enseignement entre arithmétique et algèbre nous renvoient bien sûr à l'élève, et à une meilleure connaissance de ses difficultés, stratégies, etc., en regard de différentes situations qui donnent sens au raisonnement algébrique (dimension sur laquelle travaillent différents projets du présent programme). Toutefois, ces questions concernent également l'intervenant ou le futur intervenant, qui sera, lui, aux prises avec des choix didactiques à poser face à des situations et des approches à privilégier en regard d'une introduction à l'algèbre, et qui devra pouvoir être à l'affût des raisonnements et difficultés des élèves dans cette transition entre arithmétique et algèbre. Or, ces choix ne sont pas indépendants du rapport que ce futur intervenant entretient lui-même avec le savoir arithmétique et algébrique.

Notre implication en formation des maîtres nous amène à nous tourner plutôt vers ceux qui seront maîtres demain. Notre expérience auprès de ces futurs enseignants dans des cours de didactique des mathématiques témoigne d'une résistance, par exemple, dans le passage d'un mode de raisonnement à l'autre chez certains d'entre-eux. Il nous semble important de mieux comprendre où se situe cette résistance chez les étudiants-maîtres. C'est l'angle d'attaque de notre projet qui, en s'intéressant aux étudiants en formation des maîtres, cherche à repérer les difficultés qu'eux-mêmes éprouvent dans le passage d'un mode de traitement à l'autre (arithmétique/algèbre), difficultés susceptibles de nous expliquer les choix qu'ils poseront par la suite. Plus spécifiquement, ces difficultés ou résistances seront regardées via un volet particulier: la résolution de problèmes qui constitue un objectif essentiel de l'enseignement actuel, et qui joue (en théorie du moins) un rôle important dans l'enseignement autant de l'arithmétique que de l'algèbre.

But de la recherche

L'objectif essentiel de la recherche vise à mieux cerner, en regard de différents problèmes arithmétiques et algébriques à résoudre et à travers les modes de résolution que les étudiants-maîtres mettent en place, les résistances et difficultés dans le passage d'un mode de traitement à l'autre. Les questions suivantes guident la recherche en cours:

Première question: Les étudiants en formation des maîtres peuvent-ils aisément passer d'un mode de raisonnement à l'autre:

a) spontanément en regard de différents problèmes qui en justifient l'utilisation;
b) lorsque sollicités à le faire.

Deuxième question: Peut-on ici observer des résistances dans le passage d'un mode de traitement à l'autre? Comment expliquer ces résistances?

Cette étude permettra de jeter un éclairage nouveau sur les obstacles et difficultés liés au passage d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique ainsi qu'au retour à un mode de pensée arithmétique, lorsque la pensée algébrique est bien installée. Une expérimentation a été conduite dans ce sens aux mois de janvier, février et mars 1992. Nous désirons dans le cadre de ce colloque vous faire part de certaines de nos observations.

DESCRIPTION DE L'EXPÉRIMENTATION

Démarche

Notre expérimentation a été menée auprès de trois groupes de futurs enseignants: étudiants inscrits au programme d'enseignement préscolaire-primaire, adaptation scolaire et sociale, et d'enseignement des mathématiques au secondaire.

Dans une première étape, au début janvier, nous avons présenté à tous les sujets un test écrit contenant huit problèmes mathématiques (quatre problèmes «connectés» dits arithmétiques; quatre problèmes «déconnectés» dits algébriques[1]). L'analyse des procédures utilisées pour résoudre ces problèmes nous a permis d'identifier des classes de sujets ayant des procédures de résolution, pour l'ensemble de ces problèmes, très typées: certains d'entre-eux ont tendance à résoudre ces problèmes -que ceux-ci soient connectés ou non- majoritairement par un raisonnement arithmétique, d'autres auront recours majoritairement à un raisonnement algébrique, et d'autres enfin ont une tendance mixte, utilisant parfois l'arithmétique, parfois l'algèbre (pour une définition de résolution arithmétique et résolution algébrique, se référer au texte de Bednarz et Janvier, décembre 1991). Différents protocoles d'entrevue ont alors été élaborés pour chacun de ces trois groupes de sujets; des entrevues individuelles -filmées sur vidéo- ont été effectuées conformément à ces trois protocoles (huit sujets par groupe) au mois de février et mars dernier.

Des entrevues dyadiques devant confronter un sujet «arithmétique» et un sujet «algébrique», dont l'objectif consiste à faire ressortir davantage à travers les incompréhensions qui surgissent de part et d'autre les ruptures et sauts conceptuels qui existent entre les deux modes de raisonnement, constituent la troisième phase de notre recherche. Ces séances ont été planifiées pour la fin avril.

---

1 L'élaboration des problèmes s'est faite à la lumière de la grille d'analyse élaborée par l'équipe Bednarz, Janvier, Mary, Lepage; voir texte ci-joint pour l'explication de ce que l'on entend par problèmes connectés et problèmes déconnectés.

Le peu de temps dont nous disposions pour l'analyse nous a forcé à nous concentrer sur une partie des données: les entrevues conduites auprès des sujets à tendance «arithmétique» .

Protocole d'entrevue: sujets «arithmétiques»

Les questions qui guident ici l'élaboration du protocole et la première analyse que nous en avons faite, sont les suivantes: ces sujets passent-ils ou non à un mode de traitement algébrique, lorsque les contraintes introduites en justifient la pertinence (problèmes de plus en plus complexes en termes des relations impliquées). Parce qu'ils y passent lorsqu'on les sollicite à le faire, quels difficultés et obstacles peut-on repérer dans ce passage?

Le protocole suivi pour interviewer les sujets à tendance «arithmétique» consiste dans un premier temps à présenter un à un une série de cinq problèmes (voir annexe), plus ou moins complexes en termes des relations impliquées. Le protocole permet d'avoir une trace de façon dynamique de l'approche du sujet ainsi que des conditions (type de relations, enchaînement) pour lesquelles les sujets utilisant principalement des procédés arithmétiques, ressentent la nécessité de passer à l'algèbre. Pour les sujets qui ne passent jamais à l'algèbre lors de la résolution de ces problèmes, ce protocole prévoit de solliciter expressément une solution algébrique au problème plus complexe. Le but alors visé consiste à faire ressortir les raisons du blocage de ces sujets typés arithmétiques dans le passage à l'algèbre.

En second lieu, sont présentées trois procédures caractéristiques tirées de solutions d'étudiants (une procédure algébrique et deux procédures arithmétiques) à un même problème «arithmétique» repris du test écrit. Les sujets sont invités à expliquer ces solutions et à pointer celle qui leur semble la plus pertinente en regard de ce problème. Ce procédé se répète en présentant cette fois trois procédures différentes (toujours une solution algébrique et deux solutions arithmétiques) à un problème «algébrique» tiré également de l'épreuve préalable. Ces explicitations permettront de voir l'interprétation qu'ils sont capables ou non de donner à ces procédures différentes (peuvent-ils plus particulièrement expliquer les raisonnements algébriques). La justification de leur préférence devrait permettre d'identifier les caractéristiques qu'ils associent à l'arithmétique et l'algèbre, caractéristiques qui fondent -en partie du moins- leur orientation arithmétique.

Profil des sujets à l'épreuve préalable

Il va de soi, tous les sujets ont eu une formation en algèbre, niveau secondaire IV ou V, et même supérieure pour certains d'entre-eux. Notre sélection des sujets dits «arithmétiques» repose en premier lieu sur deux critères:

1. ils ont utilisé l'arithmétique pour traiter sept ou huit problèmes (sur les huit problèmes présentés au test écrit);
2. ils ont une bonne performance à ces problèmes (cinq problèmes réussis et plus; ne sont pas considérés, ici dans ce choix, les sujets ayant une performance plus faible); il s'agit donc là d'un raisonnement arithmétique stable et solide.

Dans une seconde phase, deux types de raisonnement ont été identifiés à travers les procédures des étudiants:

— Type 1: **procédures de type «essais numériques»:** Une valeur approximative - en fonction des contraintes numériques imposées- est assignée à l'un des éléments inconnus du problème. Une séquence d'opérations, requérant une maîtrise suffisante des relations exprimées, est mise en branle en faisant comme si cette valeur était effectivement celle recherchée. La distance qui sépare le résultat ainsi obtenu des contraintes inhérentes au problème suscite un réajustement successif de cette valeur de base, jusqu'à ce que ces contraintes soient entièrement respectées. Ce type de procédure implique distinctement un raisonnement reposant sur des grandeurs connues (voir exemple texte de Bednarz et Janvier, décembre 1991, p. 5)

— Type 2: **procédures s'articulant sur les relations:** Le raisonnement s'appuie ici sur les relations, transformations exprimées dans le problème dans l'intention (inconsciente, la plupart du temps) d'agir sur les grandeurs connues du problème, celles-ci orientant les opérations à mener et obligeant à une restructuration successive du problème rendant possible l'évolution des calculs (ex: un ajustement d'un écart permet de ramener un problème à une situation de division de type partage, relativement mieux maîtrisée; voir exemple texte Bednarz et Janvier, décembre 1991, p. 6). Ce travail exige un contrôle sémantique constant sur le devenir du problème à travers les changements occasionnés par les opérations.

L'analyse des procédures a ainsi permis d'identifier certains sujets qui, tout en restant principalement dans le domaine arithmétique (sept ou huit problèmes résolus en ayant recours à des procédures arithmétiques), fonctionnent néanmoins de façon très divergente. Tous, indistinctement, optent pour des procédures de type 2 lors de la résolution des quatre problèmes dits «arithmétiques». La distinction entre les sujets repose ainsi sur leur choix de procédure face aux quatre problèmes «algébriques».

Nous avons retenu pour les entrevues cinq étudiants qui se sont orientés majoritairement dans une voie «essais numériques» pour résoudre ces problèmes (3 ou 4 procédures «essais numériques»). Un regard du côté des sujets utilisant des procédures de type 2 fait ressortir un phénomène curieux; sur l'ensemble des 145 sujets ayant participé au test écrit, une seule étudiante a eu recours à des procédures de type 2 pour résoudre les huit problèmes de ce test avec succès. Cas exceptionnel, évidemment sélectionné pour une entrevue. Nous avons finalement sélectionné deux sujets ayant tendance à s'orienter vers des procédures de type 2 (2 procédures de type 2).

CONSTATS CONCERNANT LE PASSAGE DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ALGÈBRE

Passage à l'algèbre: oui ou non? Pour quels problèmes?

Tous les sujets ayant participé à ce type d'entrevue ont ressenti, pour au moins un des cinq problèmes présentés, la nécessité de recourir à une algébrisation du problème; avec un réel engagement algébrique chez certains, de l'ordre d'un simple souhait chez d'autres, ceux-ci étant incapables d'aborder véritablement une résolution algébrique. Ce désir de s'orienter vers l'algèbre faisait suite à une approche arithmétique infructueuse du problème.

Le problème #5, le plus complexe (voir annexe), est celui qui a le plus suscité un tel souhait chez les sujets (chez six sujets) suivi des problèmes #2 et #4 (pour cinq sujets). Point commun entre ces trois problèmes, ils engagent des relations de type additif et multiplicatif (composition de relations non-homogènes) d'une complexité relative, plus difficile à gérer arithmétiquement. Le problème #4 offre néanmoins la possibilité d'une traduction directe des relations émises dans le problème, qui semble en faciliter la résolution algébrique (ce problème est mieux réussi par l'algèbre que les problèmes #2 et #5).

Toutefois, malgré le désir exprimé, la voie algébrique s'est avérée inaccessible pour certains sujets (3 sujets) qui n'ont pu amorcer une résolution algébrique véritable face au problème qui les confondait. D'autres sujets, par contre, se sont engagés dans la résolution algébrique -avec difficultés- dès le problème #2, pour ne plus revenir à l'arithmétique (3 sujets). D'autres encore, se sont orientés vers l'algèbre de façon sélective en regard des problèmes, n'allant vers l'algèbre que dans certains cas (2 sujets). L'analyse des documents vidéoscopiques met en lumière les obstacles, à une algébrisation du problème, rencontrés par les individus que ne peuvent passer à l'algèbre, ainsi que les difficultés vécues par les autres sujets dans la résolution algébrique.

Obstacles à l'algébrisation

Les étudiants-maîtres ne pouvant fonctionner algébriquement utilisent un certain symbolisme, dont la fonction dans la démarche de résolution semble d'une toute autre nature que celle requise par «l'algèbre-outil de résolution de problèmes». L'analyse des discours et traces écrites permet de discerner des statuts différents accordés au symbolisme qui s'avèreront un obstacle au passage à un mode de traitement algébrique du problème.

— **transcription symbolique littérale:** permettant de garder des traces des relations.

Exemple 1, problème #3:

M + 15 000 = Chantal
S + 5 000 = Chantal

Remarque: Cette personne pointe le symbolisme utilisé en disant: «Marie a 15 000 de plus que Chantal, Sophie a 5 000 de plus que Chantal». Pour la résolution, elle s'engage ensuite dans une voie arithmétique.

Exemple 2, problème #2: M (7 X +)

Après s'être engagé dans une procédure «essais-erreurs» infructueuse, ce sujet décide de s'orienter vers l'algèbre:

$$7M + 1C = 40\,000$$
$$1C = \frac{40\,000}{7M}$$
$$1C = 5\,714{,}2$$

Remarque: Le symbolisme utilisé n'ayant qu'une fonction nominative, le sujet peut aisément se départir du M.

Exemple 3, problème # 4:

Marie	x
Sophie	y
Chantal	z

$$y - 16\,000 = x$$
$$3x = 1z$$
$$y = x + 16\,000$$

Remarque: Le symbolisme ne sert qu'à garder des traces des relations. Ce symbolisme lui pose certains problèmes quand cette personne passe spontanément à la résolution algébrique.

$$3x = 1z$$
$$x = \frac{1z}{3}$$
$$x = 69\,333{,}30$$

Remarque: À partir de la grille d'analyse mentionnée à la note 1, cette personne est confrontée à la substitution algébrique. Ne pouvant s'y engager, elle opère ensuite arithmétiquement en s'appuyant sur les valeurs connues (montant total, 208 000 + 3).

À travers ces notations, la ou les variables utilisées ne servent qu'à nommer les éléments présents dans le problème, à des fins d'aide-mémoire en quelque sorte. Cette transcription symbolique littérale ainsi que les fonctions auxquelles elle répond, sont tributaires du statut essentiellement «désignatoire» que le sujet accorde au symbolisme.

Cette démarche mobilisant ce genre de notation symbolique ne constitue en fait qu'une phase désignatoire initiale; les sujets s'orientent alors très fréquemment par la suite vers des procédures arithmétiques. Toutefois, ces transcriptions symboliques littérales sont parfois engagées telles quelles, soit lorsqu'ils passent spontanément à l'algèbre, soit lorsque sollicités. Or, en aucun moment les sujets ne peuvent procéder aux substitutions algébriques nécessaires, ni opérer véritablement sur les valeurs inconnues, et ce, en raison du statut qu'ils accordent au symbolisme: un outil strictement désignatif.

— Fonction de simple désignation des valeurs inconnues en relation les unes avec les autres: désignation des états successifs

Exemple 1, problème #2:

Chantal	Marie
x	7x

Remarque: Le sujet résout ensuite le problème par une procédure arithmétique «essais numériques».

Exemple 2, problème #3:

Marie	Chantal	Sophie
x + 15 000	x	x + 5 000

Remarque: Le sujet résout ensuite par une procédure arithmétique «relationnelle» (type 2).

Exemple 3, problème #5:

Marie	Chantal	Sophie
2x	x	x + 36 000
y + 36 000		y

Remarque: Ni les procédures de type 1, ni celles de type 2 ne peuvent aider ce sujet à résoudre ce problème. Cette personne persévère alors dans l'algèbre et parvient à substituer à y une valeur en termes de x.

2 X x$ + y + 43 000$ ↓ 2 X x$ + x + 79 000	x$	x + 36 000$ y

Remarque: Cette personne est ensuite incapable de s'engager davantage dans une voie algébrique. Restant centrée sur les états successifs, il lui est impossible de modéliser les relations globales en présence.

Le symbolisme utilisé ici revêt encore une fois un caractère essentiellement désignatoire, d'un niveau supérieur (?) comparativement à la transcription symbolique littérale. Les notations servent, en plus d'aide-mémoire, à mettre de l'ordre dans les données fournies en identifiant clairement les données inconnues, en percevant comment celles-ci sont générées. La substitution algébrique semble un procédé plutôt naturel dans cette démarche. Par contre, en aucun moment ces individus ne peuvent opérer sur les symboles utilisés. Par exemple, lorsqu'invités à résoudre les problèmes #2 et #3 par l'algèbre, ces personnes se disent incapables de le faire malgré une timide tentative ayant conduit à l'équation suivante pour le problème #2: 40 000 = x + 7x. Concevoir les opérations sur les symboles nécessite un saut conceptuel indéniable: les symboles, très utiles jusqu'alors en arithmétique pour désigner, doivent maintenant servir à opérer. Un seuil difficile à franchir.

En somme, tel qu'il appert dans l'analyse de cette utilisation du symbolisme, un des obstacles à l'algébrisation tient au statut essentiellement «désignatoire» que les sujets accordent au symbolisme. L'analyse des entrevues vidéoscopiques effectuées auprès des sujets étant effectivement passés à l'algèbre met en évidence le caractère opératoire du statut qu'eux, contrairement, accordent au symbolisme. Des indices du statut opératoire se manifestent chez ces individus dès qu'ils identifient la première variable et celles qui en découlent dans la modélisation qu'ils font du problème et qu'ils opèrent ensuite sur celles-ci en les englobant dans la démarche de résolution, ou lorsqu'ils retournent sur les notations préalables (d'ordre désignatoire) en les modifiant afin d'opérer sur celles-ci.

Un des sauts conceptuels nécessaires dans le passage à l'algèbre est ainsi associé à un changement de statut du symbolisme (passage à un statut opératoire). L'analyse du troisième type de symbolisme témoigne maintenant d'un obstacle d'une toute autre nature.

— Raisonnement s'articulant sur les relations

Le deuxième type d'obstacle prend sa source dans le raisonnement même utilisé. Prenons cet exemple:

Exemple 1, problème #5:

+ 36 000   + 43 000

Chantal ——————→ Sophie ——————→ Marie

- →

X2

79 000

Ces notations constituent en fait un support d'analyse du problème qui caractérise un raisonnement s'articulant sur les relations à partir de valeurs numériques **connues**. Ce raisonnement court-circuite l'algébrisation du problème. Le passage à la résolution algébrique dans l'exemple rapporté ci-haut, requiert du sujet que celui-ci cesse d'agir sur les relations entre valeurs numériques **connues** pour se fixer sur les valeurs inconnues et organiser autour d'un substitut de ces valeurs, cette fois, les relations exprimées.

Les obstacles mis en évidence dans le passage à un mode de traitement algébrique du problème trouvent ainsi leur origine d'une part dans la nature même du raisonnement utilisé, et d'autre part, dans le statut accordé au symbolisme. La résolution algébrique requiert de plus la reconnaissance de la nature même de ces opérations effectuées sur des valeurs inconnues, difficile à saisir même par ceux qui ont intégré le statut opératoire du symbolisme comme en témoignent les observations rapportées ci-après.

Difficultés liées à la résolution algébrique

— Un modèle implicite d'équation recherché dans la mise en équation

Au moment de la mise en équation, les étudiants-maîtres cherchent à produire une forme d'équation connue: une suite de variables intercalées de symboles d'opération d'un côté et un nombre de l'autre côté du signe d'égalité. Le problème #4 conduisant à une équation de ce type par simple processus de traduction, est très bien réussi. Par contre, le problème #5 ne peut mener à cette forme d'équation connue et, par surcroît, ne peut conduire par simple traduction directement à une équation. Certains étudiants soutiennent alors que ce problème est impossible à résoudre. Fait intéressant, un étudiant qui était incapable d'en venir à une équation, a résolu ce problème «par l'algèbre» mais mentalement!

Exemple 1, problème #5:

$$(2x + 36\,000) + x + (2x + 79\,000) =$$

Ce sujet tente d'abord de produire une forme d'équation connue. Il constate alors qu'il ne peut agir de cette façon parce que l'énoncé du problème ne contient pas de montant total. Il cherche alors une autre façon.

Il écrit alors en premier		puis il écrit en deuxième
Sophie	2x - 36 000	x + 36 000
Marie	2x	2x - 43 000
Chantal	x	x

$$2x + 2x + x = 36\,000$$

Après avoir biffé cette deuxième équation, il réfléchit longuement et silencieusement en fixant les dernières relations qu'il a écrites. Il déclare ensuite: «Marie a 79 000. J'vais calculer pour les autres». Malgré les explicitations qu'il fournit ensuite à l'interviewer, il ne peut en venir à une équation.

— Un modèle implicite de résolution dans la manipulation algébrique

Les transformations algébriques effectuées par nos sujets semblent répondre, de façon similaire, à la recherche d'un certain pattern: isoler les x d'un côté et les nombres de l'autre côté du signe d'égalité. Dans cette intention, certains sujets ont ainsi résolu les équations suivantes:

Exemple 1, problème #2:

$$x + 7x = 40\,000$$

on isole ce x, en le gardant de ce côté-ci du signe =, et on envoie le reste de l'autre côté

$$x = \frac{40\,000}{7x}$$

Remarque: Ce sujet divise 40 000 par 7 et constate que ça ne fonctionne pas.

Exemple 2, problème #4:

$$x + 3x + 3x - 16\,000 = 208\,000$$

$$x + 3x + 3x = 208\,000 - 16\,000$$

on isole ce x

$$x = \frac{192\,000}{6x}$$

$$x = 32\,000$$

Remarque: Une erreur de signe (-16 000) et la nature des nombres impliqués conduit ce sujet à la bonne réponse. Toutefois, ce dernier constate son erreur de signe, il revient et résout alors correctement, très embêté de constater que dans les deux cas il obtienne la même réponse.

Les étudiants-maîtres n'ont pas fait d'algèbre depuis longtemps. Ils se souviennent grosso modo des règles de transformations algébriques (schéma de résolution); leur souvenir de ces règles s'est toutefois estompé. Ils appliquent certaines règles, en faisant part de leur incertitude. Le résultat obtenu, ils procèdent à une vérification arithmétique. Cette vérification les informe de l'adéquacité de la règle utilisée: «J'aurais pas dû diviser tout de suite, j'aurais peut-être dû additionner avant». Ce *feedback* arithmétique les amène graduellement à se souvenir des règles apprises. Il est intéressant de constater qu'en aucun moment, ils amorcent un raisonnement s'articulant sur les transformations algébriques. Ils redécouvrent les règles en les testant (feedback arithmétique) et non par un rationnel algébrique. D'ailleurs, lorsque interrogés sur la logique des transformations algébriques, ils ne peuvent fournir d'explications: pour eux, ce ne sont que des automatismes, au rationnel difficilement accessible.

Distinction entre les sujets utilisant des procédures de type «essais numériques» et les sujets dont les procédures s'articulent sur les relations

Le raisonnement par essais numériques ressemble par certains côtés au raisonnement algébrique. Dans les deux cas, le raisonnement procède en faisant comme **si** la valeur recherchée était connue. Dans la procédure «essais numériques», le sujet se donne une grandeur approximative, tandis que dans l'algèbre le sujet désigne un substitut de cette valeur. Par la suite, ils articulent les relations exprimées en mobilisant cet intermédiaire. Cette apparente similitude fonde la question suivante: les sujets utilisant principalement des procédures «essais numériques» sont-ils plus aptes à adopter un raisonnement algébrique?

Parmi les cinq sujets typés tendance «essais numériques» à l'épreuve préalable (3 ou 4 procédures «essais numériques»), seulement deux d'entre-eux sont effectivement passés à l'algèbre au cours de l'entrevue. Concernant les trois sujets ayant utilisé au moins deux procédures de type 2 au test écrit, ils sont tous passés à l'algèbre. Plus intéressant encore, seuls les sujets typés tendance type 2 ont réussi le problème #5 par l'algèbre. Les sujets typés «essais numériques» -ayant passé à l'algèbre- ont été incapables d'utiliser l'algèbre pour résoudre ce problème; par contre, l'algèbre leur a permis de solutionner le problème #4, problème qui suscite un simple processus de traduction.

Lors des entrevues, la procédure «essais numériques» apparaît comme étant la voie de dernier recours, les sujets ainsi typés -par l'analyse du test écrit- s'engageant principalement durant ces séances dans des procédures de type 2. Ces sujets s'orientent vers «l'essai numérique» lorsqu'ils ont de la difficulté à maîtriser les relations. La tendance «essais numériques» témoigne ainsi d'une difficulté dans le contrôle des relations. Or, le problème #5 requiert un contrôle laborieux des relations exprimées; les sujets typés «essais numériques» semblent donc moins bien outillés intelllectuellement face à des problèmes de ce type.

Par ailleurs, seule la personne ayant résolu les problèmes de l'épreuve préalable par des procédures de type 2 peut fournir une explication rationnelle des manipulations algébriques. Cette observation soulève la question suivante: la capacité de contrôler les relations en arithmétique permet-elle une meilleure compréhension des transformations algébriques? Dans ce cas, les sujets très forts dans l'analyse des relations passent-ils plus aisément à l'algèbre? Ce phénomène expliquerait en partie pourquoi il nous a été si difficile de dépister des individus de cette catégorie fonctionnant en arithmétique. L'analyse des entrevues conduites auprès des sujets typés algébriques permettra, nous le souhaitons, de répondre à cette question.

Bibliographie

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes: une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. Texte présenté dans le cadre du colloque sur l'émergence de l'algèbre. Avril 1992.

Bednarz, N., Janvier, B. (1991). *Émergence des raisonnements algébriques: un essai de caractérisation des sauts conceptuels qui marquent le passage à un mode de pensée algébrique*. (Texte de réflexions en vue de l'élaboration du colloque du groupe de recherche sur l'algèbre), Cahiers du CIRADE, Université du Québec à Montréal, 14 pages.

ANNEXE

Problème #1:

Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000$ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000$, combien d'argent recevront Marie et Chantal?

Problème #2:

Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 7 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 40 000$, combien d'argent recevront Marie et Chantal?

Problème #3:

Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000$ de plus à Marie qu'à Chantal, et il donne 5 000$ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000$, combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème #4:

Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16 000$ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208 000$, combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème #5:

Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000$ de plus à Sophie qu'à Chantal et finalement 43 000$ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?

LE RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ÉCRITS: UN MODÈLE D'INTERACTION DE REPRÉSENTATIONS

Luis Radford[1]
CIRADE
Université du Québec à Montréal

---

1. La position du problème

La résolution de problèmes algébriques écrits -word problems- constitue un des points du programme de l'école secondaire où les élèves éprouvent des difficultés majeures. L'échec constant des modèles utilisés dans l'enseignement demande de s'arrêter sur ce problème afin de mieux comprendre les difficultés qui le sous-tendent et pouvoir mettre en place des séquences d'enseignement susceptibles de faciliter une construction correcte et efficace des connaissances par les élèves.

Notre projet se centre particulièrement sur le type de pensée algébrique qui est mise en œuvre par l'élève quand il résout un problème écrit. Ce n'est que par la connaissance des caractéristiques de cette pensée qu'on pourra arriver à mieux connaître et comprendre les difficultés que suscite cette difficile tâche qu'est la résolution algébrique d'un problème écrit.

Le texte que nous présentons à ce colloque interne vise, outre de faire le point sur les résultats que nous avons obtenus précédemment et de situer ceux-ci par rapport à d'autres travaux, la présentation d'un modèle de résolution algébrique de problèmes écrits. Le modèle reprend certains éléments issus de la théorie des représentations (pour laquelle les idées de N. Bednarz et C. Janvier m'ont été très précieuses) et certains éléments de la Linguistique, en particulier de la Pragmatique du Texte. La pertinence de notre modèle est suggérée par la possibilité qu'il fournit d'interpréter les résultats que nous avons obtenus au Guatémala dans une expérience exploratoire auprès d'élèves en apprentissage de l'algèbre (14-15 ans). Mais à un autre niveau, notre modèle ouvre aussi sur des perspectives permettant de mieux comprendre certains éléments de l'algèbre des abbaquistes, c'est-à-dire l'algèbre qui s'est développée du 12e au 16e siècles en Europe, et plus particulièrement en Italie, dans les Écoles d'Abbaco. On verra, en effet, que les productions des algébristes de cette époque cadre parfaitement dans la dynamique d'interactions entre représentations sur laquelle repose notre modèle.

2. La psychologie cognitive et la résolution de problèmes: un exemple

Ces dernières années, la psychologie cognitive a attiré l'attention sur certaines fonctions intellectuelles qui sont présentes dans la résolution d'un problème, comme la compréhension du problème, le rôle de la mémoire, la représentation interne des informations, et on a mis en place certains modèles qui essaient de rendre compte du

---

[1] Luis Radford est maintenant professeur à l'Université Laurentienne de Sudbury. Lorsque ce texte a été produit, il était chercheur postdoctoral au CIRADE.

fonctionnement des processus cognitifs présents dans la résolution d'un problème. Néanmoins, les modèles existants se limitent en général aux problèmes écrits d'arithmétique élémentaire (cf. Greeno; 1985).

Dans la perspective de la psychologie cognitive, une emphase particulière a été donnée au type de connaissances préalables qu'il est nécessaire qu'un individu possède pour résoudre avec succès un problème. Greeno (1980) affirme qu'il est indispensable que l'individu ait une connaissance spécifique au domaine dans lequel le problème se situe (arithmétique, algèbre, ...). Il affirme aussi que l'individu doit posséder des stratégies générales capables de lui permettre l'analyse de la situation. En suivant cette idée, Mayer (1983) distingue quatre phases majeures dans la résolution d'un problème algébrique: compréhension, traduction, plan et exécution, et associe à chaque phase un type spécifique de connaissances: des connaissances linguistiques et factuelles, des connaissances schématiques, des connaissances stratégiques et des connaissances algorithmiques, respectivement. Or, bien que ces connaissances soient nécessaires d'un point de vue cognitif, pour pouvoir comprendre réellement les difficultés qu'éprouvent nos élèves, il faut considérer aussi la façon dont ces connaissances sont reliées et mises en action. C'est pourquoi la seule «possession» des catégories de connaissances de Mayer ne saurait être que nécessaire et non suffisante.

3. Sur certains de nos résultats précédents

La résolution algébrique d'un problème écrit peut être vue, dans un premier temps, comme la transformation d'un texte problème en une représentation algébrique externe (souvent sous forme d'équation) sur laquelle on agit en vue de répondre à la question posée.

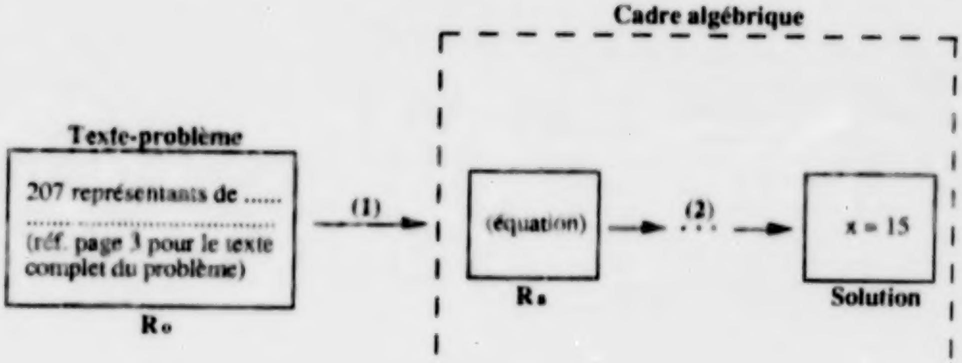


Figure 1

Le problème didactique indiqué au point 1 (c'est-à-dire la détection et compréhension des difficultés rencontrées par l'élève quand celui-ci résout algébriquement un problème

écrit) pourrait se reformuler en termes de la connaissance et du fonctionnement des éléments cognitifs qui sont à la base de:

(a) la transformation (1) qui permet de transformer la représentation initiale R_0 en une représentation algébrique R_a;

(b) les transformations (2) qui agissant sur la représentation R_a [souvent appelée la «traduction»: équation(s), inéquations(s),...] permettent de trouver la réponse au problème posé[2].

La plupart des modèles d'enseignement considèrent la résolution d'un problème écrit comme une séquence d'étapes qui se suivent de façon linéaire. C'est le modèle le plus répandu dans l'enseignement. Mathématiques Soleil (collection la plus utilisée au secondaire), par exemple, le divise en 4 étapes et fait correspondre à chaque étape un ensemble de stratégies (7 en moyenne). Les étapes sont: (1) comprendre le problème; (2) faire un plan; (3) exécuter le plan et (4) analyser la solution obtenue. Le bon fonctionnement de ce modèle suppose, entre autres, que l'élève soit en mesure de faire un plan de sa procédure avant de s'engager dans la résolution du problème. Les professeurs savent très bien que dans la pratique, cette étape est inaccessible, surtout aux élèves débutants.

Dans ces modèles d'enseignement, on donne priorité à l'utilisation des transformations de type (2), envisagées dans une perspective de l'algèbre comme discipline autonome. Et on conçoit que la transformation (1) est directe: la lecture du texte amène la compréhension du problème et la compréhension amène l'équation. Une étude précédente (Radford, 1991) nous laisse voir qu'en fait la représentation algébrique R_a n'est pas construite directement mais que l'élève a recours à une série de représentations externes intermédiaires (que nous avions appelées *structures de surface intermédiaires*) sur lesquelles il construit la représentation R_a. Cette même étude met en évidence un rôle spécifique des représentations externes intermédiaires, à savoir, un rôle référentiel, joué particulièrement lorsque l'élève se trouve en situation de compréhension du problème. La figure 2 ci-bas illustre cette situation: on y distingue trois représentations externes. La première se veut un premier *portrait* du Texte-Problème: cette représentation externe est incomplète (elle ne prend pas en compte les 207 représentants, par exemple); elle permet de dégager une certaine classe d'informations et est exprimée dans un **système symbolique** particulier (langage naturel abrégé, symboles mathématiques,....). Cette représentation a un rôle de compréhension. La deuxième représentation externe essaie d'exprimer la même chose que la première mais dans un autre système symbolique. Elle est une transition entre la première représentation et l'équation. Enfin, la troisième représentation est constituée par l'équation elle-même.

---

2 Nous distinguons entre les transformations (1) et (2) parce que la *nature cognitive* de ces transformations est fort différente.

Figure 2

Outre le fait que la transformation (1) n'est pas directe mais qu'elle se décompose en sous-transformations intermédiaires, nos résultats suggèrent que les transformations ne vont pas en «sens unique», i.e. directement vers la représentation R_a: la représentation visée R_a *conditionne* aussi les représentations externes intermédiaires (ainsi que les représentations internes), et donne lieu à une démarche en forme de réseau (cf. notre modèle plus loin).

Par exemple, en vue d'exprimer les relations contenues dans le problème de la figure 2, un de nos élève a eu recours à la représentation externe (intermédiaire) suivante:

Américains:	3x
Asiatiques:	x
Européens:	x - 16
Africains:	2x>7

L'inégalité qui apparaît dans la dernière relation ne peut pas être transportée telle quelle dans une équation (car on aurait quelque chose du type: $3x + x + 3x - 16 + 2x > 7 = 207$). Ainsi, le mot /être supérieur/, qui dans un premier temps a été lu par l'élève comme un comparateur, est repensé au niveau de la représentation interne et il puise dans sa *base de connaissances* une autre signification plausible dans le contexte du problème (c'est-à-dire dans ce que nous appelerons au point 4 le *cadre de signification*), et il substitue «2x>7» par une relation additive et écrit:

$$3x + x + 3x\text{-}16 \ (+7)2x$$

Ensuite, pour obtenir l'équation (c'est-à-dire la représentation algébrique visée R_a), l'élève place (d'après un précepte très utilisé dans l'enseignement) les termes à inconnue d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre côté:

$$3x + x + 3x + 2x = -16 + 7$$

Bien que l'équation soit abandonnée à la fin (car elle conduit à la solution impossible $x = -1$), cet exemple illustre bien comment l'idée de la représentation algébrique cherchée, R_a, peut conditionner les représentations externes intermédiaires, ainsi que les représentations intermédiaires. On voit donc que la démarche intellectuelle de l'élève quand celui-ci résout algébriquement un problème écrit ne peut plus être vue comme une suite d'étapes franchies linéairement, i.e les unes après les autres.

En fait l'influence mutuelle entre les représentations intermédiaires et la représentation visée R_a peut être observée au long de l'histoire de l'algèbre. Notre travail sur l'émergence de l'Algèbre dans l'Arithmétique de Diophante met en évidence que le processus de résolution, en particulier les choix des paramètres et le choix des relations qui lient les nombres cherchés à l'arithme, est guidé par le type d'équation auquel on va aboutir (Radford, 1992, point 4.3). Ainsi, la résolution progresse, sans perdre de vue la représentation (l'équation) vers laquelle on veut arriver. Ce phénomène historique n'est pas isolé: on peut le voir dans l'algèbre de Leonardo Pisano et de Paolo Gerardi (cf. point 5).

4. Le modèle

La lecture d'un texte amène le sujet à se faire une représentation interne (RI) du texte et celui-ci devient une représentation externe (RE) de cette représentation interne RI. La suite de caractères qui constituent le texte T renvoie donc à un ensemble de signifiés qui, se structurant, contribuent à une RI de T, rendant possible l'égalité T = RE.

Or, la représentation RI n'apparaît pas d'emblée à la fin de la lecture. La lecture est, en effet, interactive; on lit en surface en fonction de plusieurs éléments, dont certains mécanismes de lecture, et d'après la base de connaissances du sujet (cf. à ce sujet Duval; 1991). De plus, nous considérons, dans notre modèle, que la «lecture» de ce qui suit dans le texte n'est pas indépendante de ce qui le précède. En effet, la lecture permet de générer à partir d'une *phrase* un *cadre de signification* (CS) où la phrase (en tant qu'élément de la

représentation externe) acquiert un sens[3]. C'est donc dans un tel cadre que les phrases suivantes vont être interprétées. C'est justement l'accommodation et la structuration des cadres de signification successifs qui donnent lieu aux représentations internes RI_1, RI_2, ...

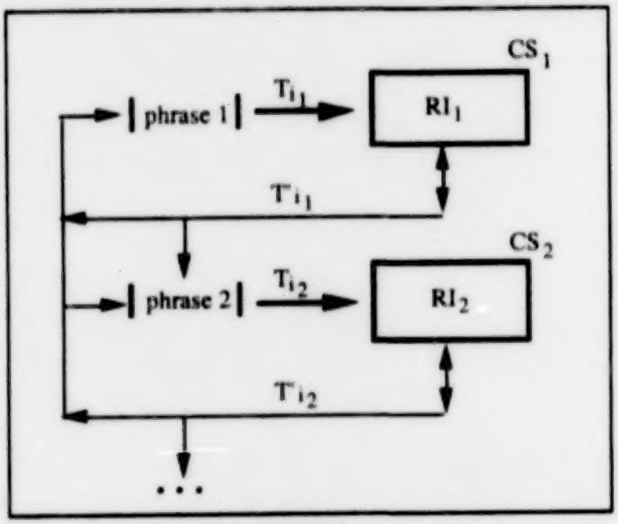


Figure 3

Les T_{i_j} de la figure 2 sont des *transformations d'intériorisation*.

Les T'_{i_j} sont des *fonctions de contrôle*: Une fois la représentation RI_1 construite, on décide si on «relit» la phrase 1 ou si l'on passe à une autre phrase.

Jusqu'ici nous avons abordé, dans un cadre de représentations, le cas de la lecture d'un texte en général. Notons, au passage, que la *compréhension* d'un texte peut être envisagée dans les termes de notre modèle comme la construction d'une représentation interne. Il est clair que la compréhension peut intervenir à plusieurs niveaux de profondeur, les niveaux les plus profonds correspondant à des représentations mieux structurées des cadres de signification[4], la question que nous devons nous poser maintenant est celle de la lecture d'un texte problème (T-P).

---

3 Ainsi, la phrase p=/soit f une fonction polynômiale quadratique/ génère un CS (évidemment non nécessairement le même pour deux lecteurs différents) qui donne du sens aux termes /fonction/, /fonction polynômiale/ et où l'on pourrait trouver une parabole, l'équation de deuxième degré, etc. La lecture d'une phrase p' postérieure permettra au lecteur de s'arrêter sur telle ou telle facette de la phrase p.

4 Évidemment, la compréhension est un état subjectif. De plus, en fonction des mécanismes de lecture, une représentation peut être favorisée au détriment d'une autre: c'est pourquoi deux personnes peuvent avoir *compris* deux choses différentes sur un même texte.

À la différence de la seule attitude de compréhension qu'on demande au sujet quand celui-ci lit un texte, dans un T-P, il doit *agir* en vue de répondre à la question posée. Et nous avons vu que lors de l'organisation des cadres de signification des phrases (c'est-à-dire lors de la construction de représentations internes), le sujet peut avoir recours à des représentations externes intermédiaires (REI), comme celles montrées dans la figure 2: le sujet peut écrire certaines choses en cours de lecture pour s'orienter dans l'idée qu'il se fait du texte. Mais ces représentations externes intermédiaires peuvent émerger aussi dans le but de construire la représentation algébrique R_a à partir de laquelle il peut trouver la solution au problème posé. Dans ce dernier cas, l'élève construit une représentation algébrique intermédiaire REI dans un certain système symbolique SS (par exemple, celui où il envisage d'«écrire» l'équation). L'exemple suivant illustre cette situation. Il s'agit de la production d'un élève à propos du problème du congrès (fig.2).

L'élève écrit les relations dans un premier système symbolique:

américains	3x
asiatiques	
européens	-16
africains	2x + 7

Ensuite il construit l'équation:

$$3x - 16 + 7 + 2x = 207$$

Dans (Radford, 1991) nous avons souligné que justement la non distinction de la part de l'élève du rôle référentiel (plus proche de la compréhension) et du rôle opérationnel (plus proche de la construction de la représentation Ra, i.e. l'équation) des représentations intermédiaires, constitue un obstacle pour l'élève dans la résolution du problème. C'est justement ce qui arrive à l'élève qui a produit le texte ci-haut: il transporte directement sa production intermédiaire (à rôle référentiel) dans une équation (où cette production joue un rôle opératoire).

La figure suivante complète la figure 3 en y insérant les éventuels systèmes symboliques et les représentations externes intermédiaires (REI) correspondantes.

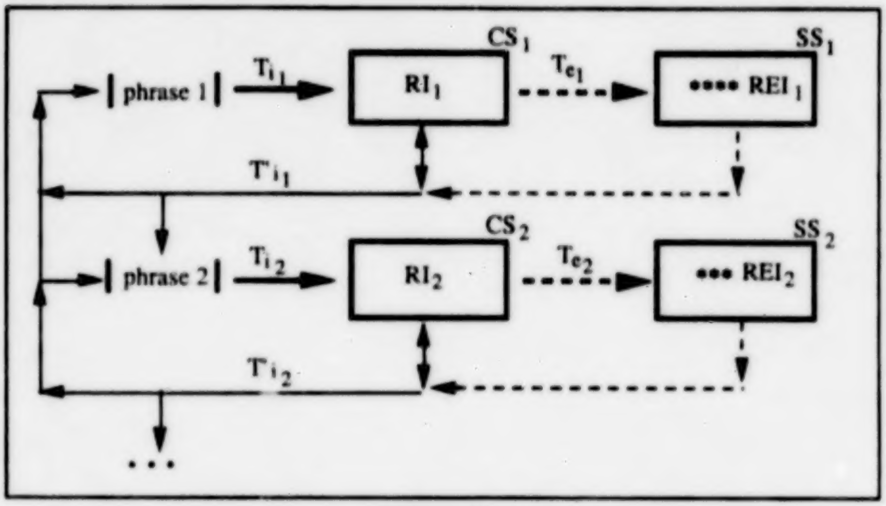


Figure 4

Légende:

T_{i_j}: transformation d'intériorisation
T_{e_j}: transformation d'extériorisation
T'_{i_j}: fonction de contrôle
RI_i: représentation interne

RE_i: représentation externe
CS_i: cadre de signification
SS_i: système symbolique

N.B.

1) Il est nécessaire de remarquer ici qu'un retour d'une REI vers la RI qui la précède peut signifier une amplification (un enrichissement) de cette RI. Mais cela peut conduire aussi à une modification de la RI en question. Dans les deux cas, il ne s'agit plus de la même RI. Notre dessin n'arrive pas à rendre compte de cette situation ainsi que des éventuelles boucles dans le cheminement.

2) Un SS peut être différent d'un SS' par la nature connotative des symboles: la seule nature dénotative peut ne pas être suffisante pour les distinguer.

Les T_{i_j} forment un **système de lecture T_i** qui rend possible une compréhension du texte, et son fonctionnement dépend, outre les facteurs déjà signalés auparavant (i.e. les mécanismes de lecture proprement dits et la base de connaissance du sujet) de la familiarité du sujet avec le contenu traité (Duval, 1991). Le **système d'extériorisation Te** constitué des T_{e_j} dépend en particulier de la possibilité qu'a l'individu d'exprimer le contenu des RI dans un certain système symbolique.

Les chances d'aboutir à une équation (non nécessairement exprimée de manière externe en termes de x, y, ...) vont alors êtres liées à la possibilité de construire des représentations externes de plus en plus complexes, articulées sur les représentations

précédentes, ce qui exige un réinvestissement du symbole présent dans une certaine représentation externe intermédiaire, REI_k, dans une autre représentation externe REI_m.

Si on revient à notre distinction entre les transformations de type (1) et les transformations de type (2) de la figure 1, on voit que le modèle précédent est centré sur une description de la construction et de l'évolution de représentations internes et externes depuis la lecture du texte jusqu'au moment où l'élève produit la représentation visée R_a. Les transformations de type (2) qui permettent de transformer la représentation Ra (imaginons Ra comme étant une équation, pour fixer les idées) ont à la base des représentations internes différentes de celles qu'on rencontre dans la transformation de type (1). Les représentations internes perdent, en particulier, leur référentiel de signification (Bednarz *et al.*, 1992) et se centrent sur l'$\varepsilon\iota\delta o\sigma$, c'est-à-dire l'*eidos*, la *forme*, la *figure*, l'*allure* des équations qui sont en surface et les actions qui permettent de les «simplifier» de plus en plus jusqu'à ce qu'on aboutisse à la solution[5].

5. Le fonctionnement de notre modèle

Nous allons étudier maintenant quelques productions d'élèves guatémaltèques à la lumière de notre cadre théorique. Ces productions proviennent d'une expérimentation que nous avons menée, à titre exploratoire, en octobre 1990 avec des étudiants qui débutaient en algèbre. L'enseignement qu'ils ont suivi est très similaire au type d'enseignement qu'on rencontre normalement dans une classe de secondaire 2 au Québec.

Voici les énoncés de trois des cinq problèmes que nous avons présentés:

Problème 3:
L'âge de Maria est cinq ans de plus que celui de Juan et la somme de leurs âges est 25. Quel est l'âge de chacun d'eux?

Problème 4:
Pedro a trois fois l'âge de Juan. Si la différence entre leurs âges est de 20 ans, quel âge a chacun?

Problème 5:
Julio a 3.40$ en pièces de monnaie de 5 et 10 cents. Si en tout il a 47 pièces de monnaie, combien de pièces de monnaie de chaque sorte a-t-il?

Les problèmes 3 et 4 sont généralement bien réussis, alors que le problème 5 a donné lieu à un échec complet sur notre échantillon de 28 élèves.[6]

À la lumière de notre modèle, les deux premiers textes–problèmes ont une même **organisation rédactionnelle** (Duval, 1991). En effet, on y reconnait trois phrases subordonnées de la même façon, de sorte que les textes-problèmes peuvent être représentés par la suite:

$$P_1, P_2, P_3.$$

---

5 C'est en fait de cette manière qu'on peut comprendre les règles de transformations d'équations que donne Diophante au début de son *Arithmétique* (cf. Radford, 1992).

6 Le même questionnaire a été donné à une classe de 32 élèves de première année de notre programme de Formation de Professeurs, et ce problème a été réussi seulement par la moitié des élèves.

Pour le problème 3, par exemple, on aurait:
P_1 = *L'âge de Maria est cinq ans de plus que celui de Juan*
P_2 = *la somme de leurs âges est 25.*
P_3 = *Quel est l'âge de chacun d'eux?*

La construction de la première représentation interne RI contiendrait l'*organisation* du cadre de signification que l'élève extrait de P_1 par la transformation de lecture T_{i_1}. Dans ce cadre référentiel on trouve les significations que l'élève accorde aux termes /âge/, /Maria/, /Juan/, mais aussi à la relation de comparaison /...de plus que.../.

La transformation de lecture T_{i_2} est conditionnée par le résultat de la transformation de lecture T_{i_1}. On pourrait dire que T_{i_2} est fonction de T_{i_1}. Ou mieux encore, on pourrait dire que le système de lecture T_i fonctionne par *composition* de ses éléments: $T_{i_k} \circ \ldots \circ T_{i_2} \circ T_{i_1}$. Une composition du type précédent peut devenir un **schéma de lecture**[7].

La résultat de la composition $T_{i_2} \circ T_{i_1}$ amène le sujet à modifier la première représentation interne RI_1, et on obtient ainsi une deuxième représentation RI_2.

En ce qui concerne le **système d'extériorisation** T_e, la plupart de nos élèves arrivent à représenter correctement la phrase P_1 du problème 3 dans un langage algébrique: ils écrivent:

âge de Maria: $x + 5$
âge de Juan: x [8]

Ainsi, la «compacité» de P_1 éclate et donne lieu à deux expressions p_1 et p'_1 dans le système symbolique algébrique usuel[9]. Mais ces deux expressions sont tout de suite reprises à la phrase suivante, P_2, qui amène avec elle l'équation:

P_2 = *la somme de leurs âges est 25* permet, en effet, d'écrire tout de suite:

$$x + 5 + x = 25 \qquad (R_a)$$

Bien que par la méthodologie expérimentale suivie, il soit impossible de dire à quel moment de la lecture ont eu lieu les écriture des représentations externes, on peut s'arrêter sur deux cas possibles:

---

7 L'idée de **schéma de lecture** m'a été suggérée par Claude Janvier dans un de nos courts entretiens habituels. Cette idée permettrait de revoir et de comprendre les résultats de Mayer sur la représentation en mémoire de certaines catégories de problèmes à partir de schémas (Mayer, 1982).

8 On remarquera que, pour ce problème, l'écart entre le rôle référentiel et le rôle opérationnel des représentations intermédiaires est minimal.

9 p_1 désigne l'expression $x+5$ et p'_1 l'expression x.

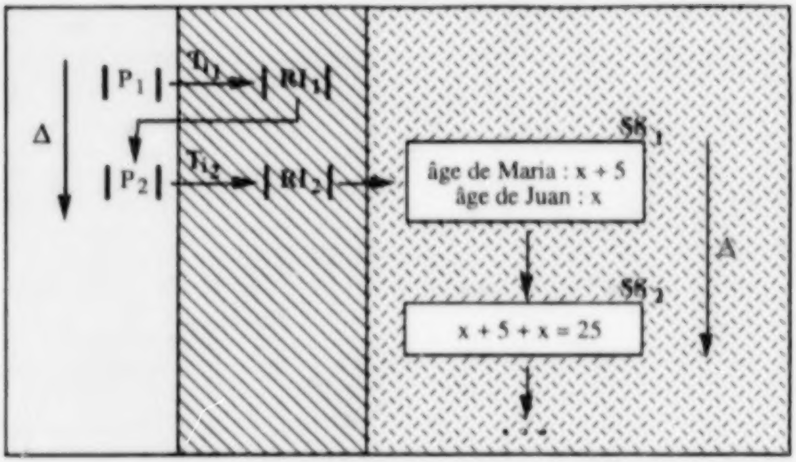
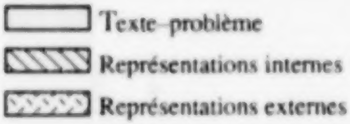


Figure 5



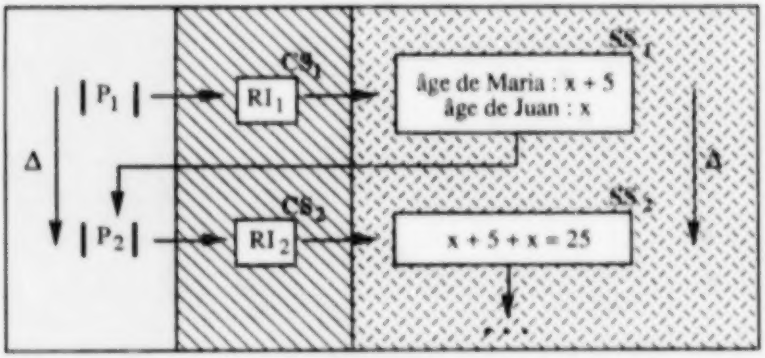


Figure 6

Dans chacun des cas on remarque que l'**ordre** des phrases dans le texte-problème induit l'ordre dans lequel se construisent les représentations externes qui permettent d'aboutir à l'équation[10].

10 On remarque, d'une part que, dans l'équation, le symbole d'égalité est utilisé dans son sens de «résultat d'opérations», et d'autre part que le symbole «+» traduit deux aspects différents des structures additives: dans le premier cas il s'agit d'un comparateur entre mesures alors que dans le deuxième il s'agit d'une opération somme entre mesures (cf. Vergaud, 1990).

Ces extériorisations sont donc possibles grâce à la «disponibilité» pertinente de symboles algébriques qu'a l'élève mais aussi parce que l'ordre des phrases du texte problème T-P «oriente» la construction de l'équation dans le système symbolique où l'équation est construite. Autrement dit, la ***direction vectorielle*** de la construction de l'équation est la même que la direction vectorielle du texte problème.

Mais de plus, les relations qui sont nécessaires pour la construction de l'équation sont données dans le T-P. Nous dirons que Ra est ***complète*** par rapport à T-P. Dans ce cas, on voit qu'il est possible de «superposer» les deux surfaces: celle de T-P et celle qui contient les représentations externes sur lesquelles on construit l'équation R_a: les deux surfaces sont donc isomorphes. Cet isomorphisme fait que dans les problèmes 3 et 4, la distance entre les surfaces du texte problème R_o et celle de l'équation R_a est minimale.

Il en va autrement pour le problème 5. En effet, une représentation Ra qui correspondrait à la mise en équation du texte-problème comporte forcément des choses qui ne se *trouvent pas* dans R_o (par exemple, dans le but de construire l'équation, il est nécessaire de construire des relations intermédiaires, telle la relation qui met en rapport le montant total (3,40$) avec le montant qui correspondrait aux pièces de monnaie de 5 cents).

D'autre part, les deux représentations ne se «lisent» pas dans le même sens: leur ***direction vectorielle*** n'est pas la même. Une superposition des deux représentations R_o et R_a n'est donc pas possible ici. La construction de la représentation R_a possède une ***direction vectorielle*** qui ne peut pas être induite par celle de R_o.

La discussion précédente a permis de faire émerger deux concepts qui s'avèrent prometteurs pour l'étude des difficultés que rencontrent nos élèves lors de la résolution algébrique de problèmes écrits: d'une part, le concept de ***direction vectorielle*** et d'autre part celui de ***complétude***.

Au point de développement où se trouve notre projet, nous pouvons émettre l'hypothèse suivante:

Hypothèse:

Les problèmes écrits les plus faciles à résoudre, pour un même élève et pour une famille fixe de problèmes (i.e. exigeant la même base de connaissances et impliquant les mêmes concepts (taux, vitesse, argent, ...) sont ceux pour lesquelles les conditions d'avoir la même direction vectorielle et la complétude sont vérifiées. De plus, à partir de ces conditions il est possible de trouver une hiérarchie de difficultés de problèmes appartenant à une même famille.

Par contre, il est plus difficile de se prononcer sur une éventuelle hiérarchie de problèmes où juste une des conditions précédentes est vérifiée. Toutefois, il semble plausible que le fait qu'un problème possède une des conditions rende sa solution plus facile. La suite de notre projet vise en particulier à répondre à cette question et à confirmer notre hypothèse. Pour l'instant nous allons voir que les concepts précédents, suggérés par notre modèle de résolution de problèmes écrits, permettent de jeter des lumières sur la production des premiers algébristes. Nous allons nous limiter particulièrement à Leonardo Pisano (Fibonacci) et Paolo Gerardi. Nous verrons que ce sont les problèmes qui vérifient la propriété de la direction vectorielle et de complétude qui sont largement favorisés dans leur œuvre.

5. UN REGARD DIDACTIQUE SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

5.1 *Libro di ragioni de Paolo Gerardi*

Le *Libro di ragioni* (ou Livre de Problèmes) de Paolo Gerardi de Florence a été écrit à Montpellier en 1328. Le livre contient 193 problèmes ayant trait à des applications au commerce (comme l'échange de biens ou «batter», des problèmes de sociétés commerciales ou «partnerships», des calculs d'intérêts, ...), des problèmes concernant des applications à la mesure, des problèmes qu'on a appelé «récréatifs», mais aussi une partie -la dernière, constituée de 15 problèmes- où il est question d'algèbre. Le *Libro de ragioni* est un livre d'abbaco qui a l'intérêt particulier d'être un des premiers livres (le deuxième à notre connaissance) écrit en langue vernaculaire traitant de l'algèbre. De plus, il contient certains types d'équations cubiques non présents chez al-Khwarizmi.

Les 15 problèmes qui constituent la partie destinée à l'algèbre (*Regolia della chose*) vérifient la propriété de la direction vectorielle alors que 13 des 15 problèmes vérifient la propriété de complétude.

Voyons quelques exemples. Mais premièrement indiquons que les problèmes commencent toujours par énoncer un type d'équation, suivi d'une règle qui permet de résoudre l'équation et ensuite un problème dont la résolution amène à une équation du type étudié. Les constituantes d'une équation sont le **nombre**, la **cosa** (la chose, l'inconnue), le **censo** (le carré de la cosa) et le **cubo** (le cube de la cosa)[11].

Problème 1:

Quand la cosa est égale au nombre, vous divisez le nombre par la cosa, et le nombre qui en résulte est la valeur [quantité] de la cosa.

Divisez 10 en deux parties telles qu'en divisant l'une par l'autre on obtienne 5.

Faites donc comme ceci. Supposez qu'une partie est la cosa, l'autre partie est nécessairement 10 moins la cosa. Maintenant, vous devez diviser 10 moins la cosa par une cosa et ceci donne 5. Donc vous devez multiplier 5 fois la cosa, ce qui fait 5 cose. Donc nous savons que 5 cose est égal à 10 moins la cosa. Maintenant donnez une cosa à chaque part. Alors le 10 est un tout et nous aurons 6 cose d'une part et exactement 10 d'autre part. Alors vous devez diviser 10 par 6 ce qui donne 1 et 2/3 et cette quantité est égale à la cosa. Et vous dites qu'une part était une cosa. Par conséquent une part est 1 2/3; l'autre part est le reste, c'est-à-dire 8 1/3.

Commentaires:

L'équation qu'on vise ici est $ax = b$.

D'autre part, le texte-problème peut se diviser en trois phrases:
P1: Divisez 10 en deux parties
P2: en divisant l'une par l'autre
P3: on obtient 5.
(La particule /telle que/ du T-P est une particule de subordination)
La phrase P_1 renvoie donc à:

---

11 La traduction au français que j'ai faite des problèmes présentés par la suite est basée sur un texte de Van Egmond (1978) qui contient en italien et en anglais les 15 problèmes algébriques du *Libro de Ragioni*.

p_1: une partie est la cosa

p'_1: l'autre partie est nécessairement 10 moins la cosa

La référence à la phrase qui suit P_1 dans le T-P (i.e. la phrase P_2) permet de continuer la construction des représentations externes qui aboutiront à l'équation dans le système symbolique vernaculaire: en effet, P_2 permet d'écrire tout de suite après: p_2: *«Maintenant vous devez diviser 10 moins la cosa par une cosa»*. L'expression p_3: *«et ceci donne 5»* est amenée par la phrase P_3 «on obtient 5»

On voit donc que la **direction vectorielle** D du T-P, c'est-à-dire la direction vectorielle de p_1, p_2, p_3, induit celle de la surface $p = p_1, p'_1, p_2, p_3$. Mais, de plus la propriété de **complétude** est vérifiée: tous les liens et relations nécessaires à la construction de la surface p étaient présents dans le T–P.

Une analyse similaire permet de voir que les problèmes 2 et 3 vérifient aussi les deux propriétés mentionnées. Par contre, les problèmes 4 et 5 vérifient la condition de la direction vectorielle mais non pas celle de la complétude.

Problème 2:

Quand le censi est égal au nombre, si vous divisez le nombre par la cosa et la racine de ce qui en résulte est égale à la cosa.

Trouvez-moi un nombre tel qu'en lui enlevant 1/3 et 1/4 et en multipliant le résultat par lui-même, on obtienne 12.

Supposez qu'un nombre est une cosa; 1/3 et 1/4 de la cosa est 7/12 de la cosa et le reste de la cosa est 5/12 de la cosa. Maintenant dites 5/12 de la cosa fois 5/12 de la cosa est 25/144 du censo, et ceci doit être 12. Ainsi, nous savons que 25/144 du censo est égal à 12. Nous devons diviser le nombre par le censi, c'est-à-dire 12 par 25/144 du censo. Changez ceci en nombre entier en multipliant 144 fois 25/144, ce qui fait 25 censi, et dites 12 fois 144 font 1728 en nombre. Maintenant vous devez diviser 1728 par 25 censi, ce qui donne 69 et 3/25, et la racine de 69 3/25 est égale à la cosa. Et vous avez supposé que le nombre était une cosa. Changez-le en racine. Dites une cosa fois 1 fait 1. Et dites, 1 fois 69 3/25 font 69 3/25 en racine. Par conséquent, le nombre est la racine de 69 3/25.

Problème 3:

Quand les cose sont égales aux censi, vous divisez les cose par les censi et ce qui en résulte est un nombre, et cette quantité est égale à la cosa.

Trouvez-moi deux nombres tels qu'ils soient partie l'un de l'autre, comme 2 et 3, et tels qu'ils fassent autant en multipliant l'un par l'autre qu'en les ajoutant ensemble.

Supposons qu'un nombre est 2 cose et l'autre doit être nécessairement 3 cose. Maintenant vous dites 2 cose fois 3 cose font 6 censi, et 2 cose et 3 cose font 5 cose. Nous avons que 5 cose sont égaux à 6 censi. Vous devez diviser les cose par les censi, c'est-à-dire diviser 5 par 6, ce qui donne 5/6 et cette quantité est égale à la cosa.

Et vous avez supposé 2 cose et 3 cose. Alors nous disons 2 fois 5/6 font 1 2/3 et cette quantité est l'un des nombres. Et vous dites, 3 fois 5/6 font 2 1/2 et cette quantité est l'autre nombre. Et c'est fait.

Problème 4:

Quand les censi est les cose sont égaux au nombre, nous devons diviser par les censi et ensuite diviser les cose à la moitié et multiplier cette moitié par elle-même et ajouter ceci au nombre, et la racine de cette somme moins la moitié des cose est égale à la cosa.

Un homme prête 20 lires à un autre pendant deux ans à intérêt composé. À la fin des deux années, le deuxième donne au premier 30 lires. Je vous demande à quel taux (rate, ragione) la lire a été prêtée par mois?

Supposons que la lira a été prêtée à une cosa par mois. La lira gagne 12 cose par an. Prenez 1/20 des 12 cose et j'ai pour la première année 20 lires et une cosa[12]. Maintenant faites la deuxième année et dites 1/20 de 20 lires est aussi une cosa et 1/20 d'une cosa de la première année est 1/20 d'un censo, et vous avez maintenant 20 lires et 2 cose et 1/20 d'une censo[13]. Et nous savons que 20 lires et 2 cose et 1/20 d'un censo sont égaux à 30.[14]

Prenons 20 lires de 30 et il nous en reste 10. Alors nous avons 2 cose et 1/20 d'un censo égale à 10 lires. Nous devons diviser par les censi. Nous devons les changer en un censo, en multipliant par 20 et dites 20 fois 1/20 d'un censo font 1 censo, et 20 fois 2 cose font 40 cose, et 20 fois 10 font 200. Maintenant nous savons que 40 cose et un censo est égal à 200. Nous devons diviser par 2 la cosa. Nous disons que la moitié de 40 est 20. Nous disons 20 fois 20 font 400. Ajoutons ceci à 200 et nous obtenons 600. Alors nous disons que la racine de 600 moins 20, qui est la moitié de la cosa, est égale à la cosa. Et vous avez supposé que la lira a été prêtée à une cosa par mois. Vous dites 1 cosa fois 1 cosa font une racine de 600 moins 20. Ainsi, la lira a été prêtée à cette quantité par mois, c'est-à-dire au taux de racine de 600 moins 20 denari.

Problème 5:

Quand les cose sont égaux au censo et au nombre, vous devez diviser par les censi et ensuite diviser par 2 les cose et multiplier ceci par lui-même et enlevez-lui le nombre, et la racine de ce qui reste plus la moitié de la cosa est égale à la cosa. Ou bien, la moitié de la cosa moins la racine de ce qui reste après avoir enlevé le nombre à la multiplication [par elle-même] de la moitié de la cosa, et cette quantité sera égale à la cosa.

---

12 Ce qui rend difficile la compréhension de cette partie c'est justement *l'incomplétude* du texte-problème: Gerardi s'appuie sur certains éléments qui ne se trouvent pas dans le T-P: l'intérêt est exprimé en denari par lira par mois. Ainsi au bout d'une année, on a 12 *cosa* denari par lira par an. Et comme il y a 12 denari en un soldus et 20 soldi en une lira, 12 *cosa* denari est égale à (1/20)*cosa* lire. Mais comme on avait 20 lire, on obtient, à la fin de l'année, un intérêt de *cosa* lire, de sorte que le capital est, au début de la deuxième année, de 20 lire plus une *cosa*.

13 On a vu que le taux d'intérêt par an était de (1/20) *cosa* lire. Gerardi applique donc ce taux au nouveau capital. Il calcule donc (1/20)x [20 + x], et cette quantité est l'intérêt qui correspond à la deuxième année.

14 C'est la somme du capital et de l'intérêt obtenu la première année avec l'intérêt obtenu la deuxième année.

Un homme fait 2 voyages. Dans le premier voyage il a gagné 12 denari. Dans le deuxième voyage il a gagné au même taux que dans le premier voyage, et à la fin il a 100 denari. Je vous demande combien de denari il avait quand il est parti.

Supposons qu'il est parti avec une cosa et qu'il a gagné 12 denari. Par conséquent il a à la fin du premier voyage 1 cosa et 12 denari. Voyons le deuxième voyage. Si dans le premier il a fait 1 cosa et 12 denari avec 1 cosa, combien fera-t-il avec 1 cosa et 12 denari? Par conséquent multipliez 1 cosa et 12 denari fois 1 cosa et 12 denari et alors divisez par 1 cosa.

Maintenant vous dites ceci: une cosa et 12 denari fois une cosa et 12 denari font 1 censo et 24 cose et 144 denari. Vous devez diviser ceci par une cosa et il en résulte 100 denari. Mais 100 fois une cosa font 100 cose. Vous savez que 100 cose sont égales à un censo et 24 cose et 144 denari. Prenez les cose des cose. Prenez 24 cose de 100 cose, il reste 76 cose, et nous avons que 76 cose sont égales à 1 censo et 144 denari.

Vous devez diviser toujours par le censi et ensuite diviser par 2 la cosa, qui est 76, dont la moitié est 38. Multipliez ceci par lui-même et cela fait 1444. Retranchez le nombre qui est 144, et il reste 1300, et la racine de 1300 plus la moitié de la cosa, qui était 38, est égale à la cosa. Et vous avez supposé que ce nombre était une cosa. Par conséquent, nous avons d'abord la racine de 1300 plus 38 en nombre. Et c'est fait, et de cette façon faites des problèmes similaires.

5.2 Quelques problèmes du Liber Abbaci de Leonardo Pisano[15]

Leonardo a écrit le Liber Abacci en 1202. Ce livre a servi de modèle aux autres livres d'abbaco écrits par la suite. La troisième partie du chapitre 15 de ce livre est consacré à l'algèbre et contient quelques 100 problèmes. Il commence en faisant une classification des quantités: radix, quadratus, numerus simples. Ensuite il distingue trois modes d'équations simples et trois modes composés.

Les modes simples sont:

1) $ax^2 = bx$ 2) $ax^2 = b$ 3) $ax = b$

Le second mode se lit: Secundus quando census equatur numero.
Les modes composés sont:

1') census et radices equantur numero ($ax^2 + bx = c$)
2') radices et numerus equantur censibus ($bx + c = ax^2$)
3') census et numerus equantur radicibus ($ax^2 + c = bx$)

La résolution d'une équation est donnée sous forme d'une suite d'instructions exprimées en langage naturel. Cette suite indique comment opérer sur les nombres donnés pour obtenir la solution.

Voici quelques exemples, pris au hasard. On remarquera que ces problèmes vérifient les conditions de direction vectorielle et de complétude.

15 La traduction au français que j'ai faite des problèmes présentés par la suite est basée sur le texte latin de Leonardo contenu dans (Libri ,1838-41).

Exemple 1: [16]

Je divise 10 en deux parties et je multiplie l'une de ces parties par 6 et ce qui résulte je le divise par l'autre partie, et le tiers de ceci je l'ajoute au produit de la première partie par 6 et le tout fait 39.[17]

Supposons que la première partie est une radix; tu la multiplies par 6 et tu as 6 res que tu dois diviser par la deuxième partie qui est 10 moins radix, et la troisième partie de ceci tu dois l'ajouter à 6 res pour avoir 39 (...)[18]. Or, la troisième partie de 6 res est deux res, qui divisé par 10 moins re est 39 excepté 6 rebus (...). Multiplie donc 10 moins res par 39 moins 6 rebus et il en résulte 390 denari et 6 census diminué de 99 res égale à deux rebus. Ajoute donc 99 res des deux parties, et tu obtiens six census et 390 denari égale à 101 rebus. Divise par le nombre de censum, i.e. 6, et tu obtiens census et 65 denari égale à 5/6 16. Prends le carré de la moitié des radix, soustrais 65 et prends la racine de ceci et tu obtiens 2 5/12 que tu enlèves de la moitié du radix, i.e. de 8 5/12 et il t'en reste 6.

Exemple 2:[19]

Je divise 12 en deux parties et je multiplie les parties et ce qui en résulte je le divise par la différence des parties et cela fait 41/2.

Soit la plus petite partie un rem. Multiplies-la par l'autre, c'est-à-dire par 12 moins re, il vient	plus petite: x
12 res diminué du census divisé par la différence des parties, c'est-à-dire par rem et 12 moins re, ce qui est 12 diminué de deux	$x(12-x)$ $12x-x^2$ $x-(12-x)$ $12-2x$
rebus. Et comme la division elle-même devient 41/2, multiplie 41/2 par 12 moins deux rebus et il	$(12x-x^2)/12-2x=41/2$, $41/2(12-2x)$
vient 54 diminué de 9 rebus égale à 12 rebus moins censu. Restaure donc dans chaque partie censum et 9 res el il vient censu et 54	$54-9x = 12x-x^2$
égale à 21 radicibus. Prends le carré de la moitié du radicum, ce qui donne 110 1/4, [...]	$x^2 + 54 = 21x$

Exemple 3:[20]

Je trouve deux nombres dont le plus grand excède le plus petit de 6, et je divise le plus petit par le plus grand et il en résulte 1/3.

---

16 Libris (1838-41), p. 371-72.

17 Rursus divisi 10 in duas partes et multiplicavi unam earum per 6 et quod provenit divisi per aliam partem et tertiam eius et quod provenit addidi super summam multiplicationis primae partis in 6, et totum id quod concretum est fuit 39.

18 Il s'agit donc de l'équation $(1/3)(6x/(10-x) + 6x = 39$.

19 Libris (1838-41), p. 381.

20 Libris (1838-41), p. 391.

6. Synthèse

1) Le texte que nous avons présenté contient, dans la première partie, une mise au point des résultats que nous avons obtenus dans le cadre de notre projet en cours *«Le raisonnement algébrique dans la résolution de problèmes écrits»*. Ces résultats concernent essentiellement la détection de certains systèmes symboliques et de certaines représentations utilisées par les élèves quand ceux-ci essaient de construire une équation à partir d'un texte-problème. Ces systèmes symboliques ont une fonction particulière (qu'il nous faudra mieux préciser par la suite) dans le processus de résolution. Un premier résultat est la mise en évidence que la prise de conscience des différentes fonctions des représentations et des systèmes symboliques impliqués peut constituer un obstacle pour l'élève.

2) Afin de mieux comprendre les difficultés qui sous-tendent la résolution algébrique d'un problème écrit, et devant l'impossibilité de pouvoir expliquer ces difficultés à partir du cadre théorique du problem solving, nous avons été amenés à formuler un modèle bâti à partir du cadre des représentations. Le modèle est centré sur l'interaction entre le texte-problème (T-P), les idées que l'individu se fait sur le T-P et les choses qu'il écrit au fur et à mesure qu'il s'engage dans la résolution. Le modèle nous permet de mieux exprimer un des résultats que nous avions obtenu auparavant, à savoir, que la représentation visée par l'élève -en l'occurrence l'équation cherchée- conditionne les représentations internes et externes intermédiaires (Radford; 1991, p.10). Notre travail sur Diophante permet de voir que ce phénomène est présent aussi dans les origines de l'algèbre.

3) D'autre part, notre modèle permet de mieux distinguer la nature des deux types de transformations qui sont à la base de la résolution d'un problème écrit: la transformation que nous avons appelée de type (1) -celle qui permet de transformer le T-P en équation- et les transformations de type (2) -celles qui permettent de résoudre l'équation. La transformation (1) dépend en particulier de l'interaction entre le texte, les idées qu'on structure à partir de la lecture de celui-ci et ce qu'on décide d'écrire à partir de cette lecture, en vue d'obtenir une équation. Les transformations (2) reposent sur la *forme* de cette équation: c'est la forme ou structure de l'équation, i.e. la position de la *cosa*, du *censo* et du *nombre* qui détermineront s'il s'agit de se débarrasser des termes «négatifs» (*al-jabr*) ou si on opère sur les termes semblables à l'aide de l'*al-muqabala*.

4) On peut mieux comprendre à la lumière du modèle les résultats exploratoires que nous avions obtenus au Guatémala. Le modèle permet, en effet, de mettre en évidence une structure non mathématique mais textuelle (il s'agit d'une structure pragmatico-linguistique) qui définit une catégorie de problèmes qui s'insinuent (pour un même public et pour une même classe de problèmes i.e. des problèmes impliquant dans leur résolution le même ensemble de concepts) comme des problèmes plus faciles à résoudre. Cette catégorie de problèmes est définie par deux propriétés: celle de la **complétude** et celle de la **direction vectorielle**. La première réfère au fait que le T-P n'*occulte pas* de notions ou relations qui seront nécessaires dans la construction de l'équation[21]. La deuxième réfère au fait que le T-P «oriente» la construction de représentations externes intermédiaires en vue d'obtenir l'équation.

---

[21] Le problème 5 du *Libro de Ragioni* de Paolo Gerardi utilise une règle de trois pour calculer l'intérêt de la deuxième année. Cette règle de trois (qui n'est pas *mentionnée*) est suggérée par l'apparition du mot /même taux/ dans le T-P. Mais cette relation ne peut être perçue qu'à travers la base de connaissances du sujet: le T-P est donc *incomplet*. Une formulation alternative du T-P peut cependant le rendre complet.

5) Il nous est apparu intéressant de voir si la catégorie de problèmes que nous avions mise en évidence était repérable au niveau de l'histoire. Nous avons décidé de nous arrêter sur certains documents mathématiques écrits dans le Haut Moyen Age et le début de la Renaissance parce que cette période s'avère intéressante pour plusieurs raisons: (1) le langage vernaculaire de l'algèbre de cette époque nous permettrait de mieux comparer le T-P et les représentations externes intermédiaires et de pouvoir mieux cerner leurs relations; (2) c'est justement dans cette période qu'on pouvait apprécier le plus la relation entre arithmétique et algèbre et la façon dont cette dernière s'affirme comme discipline scientifique.

Dans le point 5 de ce travail, nous avons donné quelques exemples de deux livres fort importants de la période en question: celui de Leonardo Pisano et de Paolo Gerardi (on s'est limité à deux mathématiciens pour ne pas alourdir le texte, mais les mêmes résultats se retrouvent chez d'autres mathématiciens, comme Maestro Jacobo, Piero della Francesca, Paolo dell'Abbaco, etc.). Il se trouve que c'est justement la catégorie de problèmes que nous avons mise en évidence à partir de notre modèle de résolutions de problèmes écrits qui est privilégiée dans ces textes.

Ces problèmes, considérés comme des «problèmes récréatifs» par van Egmond (1980), constituent en fait le matériel sur lequel l'algèbre se construit et s'affirme comme science. Ces mathématiciens n'ont pas construit ces problèmes pour le divertissement de leurs élèves mais parce que l'algèbre est en train de se faire, et l'obtention de l'équation qui permet de résoudre un problème demande un certain exercice, une certaine maturation. C'est ainsi qu'on peut comprendre que des problèmes qui ne sont pas complets au sens de notre définition ne deviendront populaires que plus tard[22].

6) La suite de notre projet vise, dans sa partie didactique, la détection à travers une expérimentation d'une hiérarchie de difficultés dans les problèmes à la lumière de notre modèle de résolution et des propriétés de complétude et de direction vectorielle, dans le but d'aboutir à la mise en place d'une séquence didactique d'enseignement.

Dans sa partie historique, notre projet continuera l'étude des conditions qui ont rendu possible l'émergence de l'algèbre au temps des abbaquistes.

---

22 Un problème similaire au problème 5 que nous avons posé au Guatémala (donc un problème incomplet) se trouve dans le *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca, publié plus d'un siècle plus tard que le *Libro de Ragioni*.

Bibliographie

Bednarz, N., Radford, L., Dufour-Janvier, B., Lepage, A. (1992). Arithmetical Thinking and Algebraic Thinking in Problem Solving. *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (P.M.E.)*. New Hampshire, August, 7-11.

Duval, R. (1991). Interaction des niveaux de représentations dans la compréhension de textes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 4*, IREM de Strasbourg, pp. 163-196.

Egmond, W. van (1978). The earliest vernacular treatment of algebra: the Libro di Ragioni of Paolo Gerardi (1328). *Physis, 20*, pp. 155-189.

Egmond, W. van (1980). *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: a catalog of italian abbacus manuscripts and printed books to 1600*. Instituto e Museo di Storia della Scienza. Firenze.

Greeno, J. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. *In:* R. Snow et al. (Eds): *Aptitude, Learning and Instruction, 2*, Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. (1985). *Competence for Solving and Understanding Problems*. Pittsburg University. Reports Research.

Libri, G. (1838-1841). *Histoire des sciences mathématiques en Italie*. Paris: Jules Renouard, *II*.

Mayer, R. (1982). Memory for Algebra Story Problems. *Journal of Educational Psychology, 74*, pp. 199-216.

Mayer, R., Larkin, J. (1983). A cognitive Analysis of Mathematical Problem-Solving Ability. *In:* R.J. Stenberg (Ed.): *Advances in the psychology of human intelligence, 2*, Hillsdale: N.J: Lawrence Erlbaum, pp. 231-273.

Radford, L. (1991). Lenguaje natural y lenguaje algebraico: el problema de la traducción en la resolución de problemas. *Paper presented at the VIII Interamerican Conference on Mathematics Education*. University of Miami.

Radford, L. (1992). Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec, 31/32*, pp. 73-80.

Vergnaud, G. (1989-1990). *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*. Un exemple: les structures additives, *Petit x, 22*, pp. 51-69.

DU TRAITEMENT DES FORMES À CELUI DES CONTENUS D'ÉCRITURES LITTÉRALES: UNE PERSPECTIVE D'ENSEIGNEMENT INTRODUCTIF DE L'ALGÈBRE[1]

Gisèle Lemoyne
CIRADE et Université de Montréal

François Conne et Jean Brun
Université de Genève

INTRODUCTION

Les erreurs dans le traitement d'écritures littérales ne sont pas l'apanage exclusif des élèves débutant en algèbre; si cela était, on s'expliquerait mal l'attention que leur portent depuis plusieurs années les chercheurs en didactique. Comprendre l'histoire et la signification de ces erreurs, construire et évaluer de nouvelles situations d'enseignement de l'algèbre ou encore, des situations plus spécifiques de remédiation de ces erreurs, nous apparaissent des objectifs naturels et pertinents des recherches conduites jusqu'à présent.

Nous effectuons dans un premier temps un examen des résultats mais aussi, des problématiques et des cadres conceptuels des recherches sur les erreurs des élèves dans le traitement d'écritures littérales. Dans un second temps, nous proposons une approche alternative à ce problème d'enseignement et d'apprentissage.

LES ERREURS DES ÉLÈVES DANS LE TRAITEMENT D'ÉCRITURES NUMÉRIQUES ET LITTÉRALES: EXAMEN DES REPRÉSENTATIONS PSYCHOLOGIQUES ET DIDACTIQUES DE CES ERREURS

1. Le diagnostic des erreurs

1.1 Les erreurs dans les exercices scolaires

Dans le domaine de la résolution d'équations algébriques, les études réalisées par Sleeman (Sleeman et Brown, 1982; Sleeman, 1986, 1987) sont bien connues. Inscrites dans la perspective d'élaboration de systèmes tuteurs intelligents, elles procèdent d'abord à une modélisation de réponses justes; des règles adéquates sont alors créées. La transformation de ces règles en règles déviantes (mal-rules) permet ensuite la modélisation des erreurs des élèves (ex.: M2SUBNEG résout la tâche 6 - 8 en ajoutant +6 et +8; M2 est une transformation de la règle juste (SUBNEG) de soustraction des nombres négatifs).

---

1 Lemoyne, G. — Recherche subventionnée par le Ministère de l'éducation du Québec: Formation de chercheurs et action concertée; Titre du projet: Émergence des raisonnements et représentations algébriques (responsable: Nadine Bednarz, CIRADE).

Brun J., & Conne, F. — Recherche subventionnée par le Fonds National suisse de la recherche scientifique, no 11-25448-88; Titre du projet: L'étude des algorithmes de calculs dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. (équipe de recherche: J. Brun, F. Conne, et R. Schubauer, Université de Genève et J. Retschitzki, de l'Université de Fribourg).

Dans les versions récentes des systèmes diagnostics, d'autres règles sont également définies pour rendre compte de conduites qui montrent un *traitement syntaxique erroné* (mal-parsing rules); ces dernières règles ne sont en général appliquées qu'une fois dans une tâche de traitement d'équations algébriques (ex.: 3x + 5x = 19 ---> x + x = 19 - 3 - 5 ---> 2x = 11 ---> x = 11 - 2).

Le principal apport de ces études réside dans une définition formelle des procédés adéquats et erronés et une référence à un ensemble de tâches conçues pour mettre en évidence les modèles erronés des élèves. Il faut également convenir de l'ingéniosité et de l'économie de ces systèmes: représentation de modèles idéaux et transformation en modèles de performance par modification de règles justes. Selon cette conception, les erreurs des élèves montrent bien une tentative d'intégration de connaissances présentées dans l'enseignement (Sleeman utilise la formulation suivante pour décrire cette intégration: *«students... consider using a correct form of a rule»)*. Ces erreurs ont donc une histoire scolaire. Mais, cette conception dévoile ses limites par le recours à des règles (mal-parsing rules) qui n'ont pas d'équivalents dans les modèles idéaux. L'adjonction de ces dernières n'est pas un événement mineur; il révèle l'individualité des connaissances et son corollaire didactique, soit l'impossibilité de référer aux seuls modèles adultes pour décrire les modèles des élèves. Qui plus est, le fait que ces règles ne soient déclenchées qu'à certains moments du processus de traitement d'équations laisse entendre qu'elles sont subordonnées à d'autres règles, à moins que dans le modèle précédent de telles règles ne soient pas suffisamment sensibles aux écritures successives du traitement. Nous discuterons ultérieurement de cette hypothèse. Poursuivons l'examen des travaux sur les erreurs, en présentant d'autres modèles de production et d'interprétation.

Matz (1980) propose une typologie des erreurs qui couvre des exercices variés des programmes d'enseignement de l'algèbre (factorisation, simplification, résolution d'équations, résolution de problèmes d'algèbre); cette typologie annonce d'emblée ses ancrages psychologiques et didactiques. Les erreurs témoignent ainsi de tentatives raisonnables mais infructueuses d'adaptation des connaissances antérieures à de nouvelles situations. Deux types principaux d'erreurs sont alors définis: les erreurs correspondant à l'absence de changements conceptuels et les erreurs liées à des techniques d'extrapolation.

La compréhension des premières erreurs renvoie à un examen des rapports entre savoirs arithmétiques et algébriques, rapports étudiés sous l'angle du passage arithmétique-algèbre. Selon Matz, ce passage s'effectue par la construction de la notion de valeur symbolique et par l'extension de la relation d'égalité. Cet énoncé constitue toujours aujourd'hui un énoncé essentiel dans les recherches sur l'algèbre (Booth, 1984; Kuchemann, 1981; Kieran, 1981, 1989), énoncé souvent validé par une référence historique au développement du symbolisme algébrique.

La seconde catégorie d'erreurs définie par Matz (1980) procède essentiellement d'une théorisation psychologique sur les processus d'élaboration de connaissances. Ainsi, confronté à une situation nouvelle, l'élève dispose de deux façons de traiter cette situation: s'il connaît la règle à appliquer, il peut se contenter d'exécuter cette règle; s'il ignore cette règle, il peut alors avoir recours à des techniques d'extrapolation. Ces techniques sont des utilisations *accommodées et inappropriées* de règles justes d'abord *rencontrées* dans des contextes partiellement comparables.

À l'appui de cette classification, Matz présente et commente plusieurs erreurs. Nous rappelons quelques erreurs et tentons de cerner, au-delà du discours, leurs représentations dans le modèle de Matz et dans celui de Sleeman. Matz range dans la première catégorie les erreurs de concaténation qui, selon son cadre conceptuel, relève de connaissances naïves, fausses ou incomplètes du symbolisme et des opérations en algèbre (ex.: 3 + x ---> 3x).

Ces erreurs sont dites syntaxiques; si cette appellation rejoint celle proposée par Sleeman pour ce type d'erreurs, elle reçoit en plus dans le modèle de Matz l'explication scolaire suivante. En arithmétique l'écriture des nombres est la concaténation des chiffres; on fait appel à la notion de valeur de position pour distinguer deux nombres formés de mêmes chiffres. De plus, dans la représentation des nombres rationnels, la juxtaposition d'un nombre et d'une fraction implique une addition. Passer de l'arithmétique à l'algèbre ne peut se faire sans heurts, étant donné ces différents sens de la concaténation. Ainsi, les réponses fréquentes des élèves à la question «*si* $x = 6$, *évaluez* $4x$ » sont: 46 et 10; selon Matz, la première réponse fait référence à des connaissances sur la valeur de position et la seconde, à des connaissances sur l'addition. Ces hypothèses nous apparaissent assez convaincantes. Cette conviction nous amène à nous interroger sur la pertinence du *discours arithmétique-algèbre* qui enrobe ces hypothèses. Ne peut-on pas en effet montrer que les rapports aux symbolismes et aux opérations marquent l'apprentissage des différents contenus des mathématiques et ne sont pas plus déterminants pour l'apprentissage de l'algèbre qu'ils ne le sont pour l'arithmétique? Si tel est le cas et si on convient que le symbolisme en algèbre comporte des propriétés, des attributs que n'a pas celui de l'arithmétique, il importe de poursuivre davantage l'examen de ce symbolisme. La notion de valeur symbolique nous apparaît alors insuffisante pour rendre compte de ces propriétés. Nous reconnaissons toutefois n'avoir pas de réponse alternative à proposer pour le moment.

Les erreurs de la seconde catégorie dans les modèles de Matz et de Sleeman relèvent de procédés comparables; elles nous semblent également dépendre de conceptions similaires sur le développement de ces erreurs. Matz nous apparaît toutefois faire appel à une interprétation plus psychologique de la construction de ces erreurs. Ainsi, les techniques d'extrapolation proposées et leur fonctionnement font écho aux processus d'assimilation et d'accommodation du modèle piagétien de développement de connaissances (Piaget, 1936, 1947). De plus, ces processus de construction sont présentés comme un atout du système apprenant.

1.2 Les erreurs dans les exercices conçus par les chercheurs

Nous disposons d'une quantité non négligeable d'études sur les erreurs des élèves dans le traitement d'écritures littérales. Ces écritures sont apprêtées de manière à vérifier certaines hypothèses sur la production des erreurs ou encore, à mieux documenter les procédures connues. Nous choisissons d'examiner d'abord plus longuement la recherche conduite par Cauzinille, Mathieu et Resnick (1987) et de rapporter ensuite brièvement les résultats de celle réalisée par Booth (1989).

Dans l'étude conduite par Cauzinille, Mathieu et Resnick, des élèves du secondaire (6e à 3e année du système français) «doivent juger de l'équivalence d'expressions numériques ou littérales. Les expressions comprennent trois termes reliés par deux opérateurs, addition et soustraction exclusivement. Chaque type d'expression est présenté sous forme littérale, puis numérique ...» (p. 42). Voici quelques-uns des exercices proposés:

a) *associativité* :

1. - $a - (b + c)$ vs $(a - b) + c$;
$15 - (6 + 4)$ vs $(15 - 6) + 4$;

b) *pertinence des parenthèses*:
7.- a - (b + c) vs a - b + c;
15 - (6 + 2) vs 15 - 6 + 2;

c) *commutativité*:
9.- a + (b - c) vs a + (c - b);
12 + (7 - 3) vs 12 + (3 - 7);

L'examen des conduites des élèves est encadré par les conceptions de l'arithmétique et de l'algèbre développées dans la problématique; les énoncés suivants rendent globalement compte de ces conceptions: les premiers concepts de l'algèbre élémentaire s'appuient sur ceux de l'arithmétique mais s'en différencient; l'algèbre est un domaine conceptuel nouveau qui prolonge le domaine de l'arithmétique que l'élève maîtrise déjà partiellement; en algèbre, les règles formelles de ré-écriture opèrent sur des expressions à la fois numériques et littérales; certaines règles découlent des propriétés des opérations et «peuvent trouver un fondement dans le domaine arithmétique, même si elles s'en dégagent nécessairement pour constituer un domaine propre, celui de l'algèbre»; l'application des règles n'a pas nécessairement pour but d'effectuer un calcul.

Les erreurs dans la comparaison d'expressions numériques sont peu nombreuses; il en est tout autrement pour les expressions littérales. Pour mieux comprendre ces erreurs, les chercheurs identifient quatre types de stratégies de comparaison (pp 48-52): 1) comparaison formelle: «comparaison directe des deux expressions qui fait appel à une règle formelle»; 2) ré-écriture: «ré-écriture des deux expressions à comparer, A et B, puis comparaison des deux nouvelles expressions obtenues»; 3) calcul: «calcul numérique de chaque expression, puis comparaison des résultats» (pour les expressions littérales, des nombres remplacent les lettres); 4) évaluation: «évaluation non quantifiée des deux expressions à comparer» (chaque signe est considéré comme une transformation (ex.: enlever, augmenter).

Le recours à chacune de ces stratégies dépend du contexte et du degré scolaire des élèves. Dans le traitement des expressions littérales, les stratégies de comparaison formelle sont les plus fréquemment utilisées; viennent ensuite dans l'ordre les stratégies de ré-écriture et d'évaluation, la stratégie de calcul étant peu utilisée. Les stratégies de ré-écriture sont davantage liées à de bonnes réponses que ne le sont les autres. Dans le traitement des expressions numériques, la stratégie de calcul est dominante et son application produit généralement une réponse correcte.

Les différences selon le degré scolaire des élèves sont particulièrement évidentes dans le traitement des expressions littérales. Les élèves de 4e et de 3e (élèves plus scolarisés) procèdent plus souvent que ceux de 6e et de 5e (élèves moins scolarisés) à des ré-écritures des expressions littérales. Ces derniers élèves privilégient par ailleurs, plus que leurs aînés, les stratégies d'évaluation et de calcul.

Dans l'interprétation générale des résultats de leur recherche, les auteurs relient les erreurs des élèves à *«des lacunes dans les connaissances»* ex.: calcul des relatifs), à *«des restrictions dans l'application des connaissances»* (ex.: procédure de ré-écriture d'une expression avec parenthèses appliquée correctement seulement s'il s'agit d'une expression numérique) et à *«des généralisations des conditions d'application des connaissances»* (ex.: commutativité de la soustraction). Ils concluent ainsi: «Le problème nous semble résider essentiellement dans la coordination des connaissances susceptibles d'être évoquées. L'analyse présentée nous semble ainsi déboucher directement sur des perspectives didactiques qui mettraient l'accent sur les relations entre connaissances, autant que sur les connaissances elles-mêmes» (p. 55).

Cette interprétation et cette conclusion nous apparaissent conséquentes avec les diverses représentations des erreurs que les auteurs nous livrent au moment de l'analyse des résultats. Ainsi, l'interprétation des erreurs de comparaison formelle renvoie aux propriétés de l'addition, à la généralisation de règles liées à ces propriétés. En cela, elle rejoint celle de Matz (1980) dont nous avons antérieurement discutée. L'interprétation des erreurs de calcul met en cause le sens des règles de ré-écriture (règles de suppression de parenthèses) et le statut des parenthèses. Nous souhaitons prolonger la réflexion sur ces interprétations en évoquant très brièvement quelques questions que suscitent ces interprétations, qui, rappelons-le, rejoignent plusieurs des interprétations généralement proposées pour expliquer les erreurs en algèbre.

Est-il opportun d'invoquer les propriétés des opérations pour rendre compte des erreurs des élèves dans la comparaison formelle des expressions et en particulier, lorsque les conduites de ces élèves sont justifiées par des déclarations du type «l'ordre des lettres ne compte pas...»? et même lorsque les élèves invoquent les noms de ces propriétés (ex.: «parce que c'est associatif») dans leurs justifications? Il est certes vrai que les conduites de ces élèves ne sont pas celles attendues, si on se réfère aux savoirs sur les propriétés des opérations. Mais, justement, si de telles conduites ne sont pas réglées par des savoirs sur les propriétés des opérations, peut-on penser qu'elles dépendent de connaissances ou de règles fausses liées à ces propriétés? Ne pourraient-elles pas dépendre plus simplement de règles liées à des pratiques sur les écritures numériques et littérales? Les pratiques liées aux expressions numériques et littérales que les chercheurs identifient dans l'analyse des erreurs de calcul nous apparaissent fonder davantage cette hypothèse.

Enfin, le fait que les élèves les plus âgés aient recours à des stratégies de ré-écriture plus souvent que les autres et que ces stratégies soient plus que les autres associées à la réussite de la comparaison d'expressions littérales mérite d'être examiné. On ne peut nier que les pratiques numériques de traitement d'écritures s'acquièrent à travers des actions sur des écritures apprêtées par l'enseignant sur la base de savoirs sur les propriétés des opérations. Il faut convenir cependant que l'élève ne peut construire ou abstraire ces propriétés uniquement de ses expériences pratiques numérisées. Les opérations réalisées à travers ses expériences doivent justement constituer les contenus d'abstraction des propriétés des opérations. Les études en épistémologie génétique montrent bien les différences entre ces mécanismes d'abstraction (Piaget, 1974). Les jugements d'équivalence appuyés sur des règles de ré-écriture appropriées nous apparaissent alors refléter davantage la compréhension des propriétés des opérations. Il n'est donc pas étonnant que de tels jugements soient plus accessibles aux élèves qui ont bénéficié d'une pratique plus soutenue et plus longue en algèbre.

Nous complétons l'examen des études sur le diagnostic des erreurs en traitement d'écritures numériques et littérales en décrivant très succinctement la recherche réalisée par Booth (1989). Booth rappelle d'abord que l'essence de l'algèbre est la compréhension de la nature structurale des relations mathématiques et des procédures; elle soutient également que les difficultés des étudiants peuvent dépendre davantage d'une incompréhension de lois de l'arithmétique que d'une incompréhension de la signification des lettres.

Dans sa recherche, Booth propose à des élèves de 13 ans deux types de tâches:

1) première tâche: «J'ai pensé à un nombre et ensuite j'ai fait quelque chose avec ce nombre , comme vous le voyez. Que doit-il être écrit dans l'espace si je veux revenir au même nombre que celui auquel j'ai pensé»;

2) seconde tâche: «Reliez l'expression de la colonne 1 à chacune des expressions de la colonne 2 que vous jugez équivalentes. Il peut y avoir plus d'une expression équivalente. Si vous pensez qu'aucune expression n'est équivalente, encerclez aucune». Voici quelques items présentés:

1) première tâche:	item 4:	(Ω - 2) x 3 .... = Ω);	
2) seconde tâche:	item C:	colonne 1:	19,7 - (3,8 + 7,4);
		colonne 2:	a) 19,7 - (7,4 + 3,8);
			b) (19,7 - 3,8) + 7,4 ;
			c) (3,8 + 7,4) - 19,7;
			d) aucune.

Booth note un nombre important de réponses erronées chez les élèves de cet âge. Ainsi, plusieurs élèves jugent équivalentes les expressions b et c de l'item C. Selon elle, une compréhension incomplète des transformations permises des expressions numériques ne place pas les élèves en bonne position pour l'apprentissage des manipulations algébriques.

2. La prévention ou la remédiation des erreurs: propositions découlant des diagnostics précédents

Les diagnostics précédents des erreurs des élèves dans le traitement d'écritures numériques et littérales sont généralement suivis par des propositions ou des recommandations visant soit une prévention soit une remédiation de ces erreurs.

En associant les erreurs dans la résolution d'équations algébriques à des règles déviant des règles justes ou à des règles fausses de traitement syntaxique, Sleeman nous entraîne dans une démarche de remédiation des erreurs. Il indique comment le système tuteur PIXIE (Sleeman, 1987: p. 259; traduction des auteurs) opère dans la remédiation des erreurs: 1) il «démontre que l'étudiant a incorrectement résolu la tâche; 2) il présente l'erreur particulière (ou les erreurs) qu'il croit que l'étudiant a commise; 3) il donne une explication de la transformation incorrecte; 4) il montre le travail de la règle juste; 5) il montre la trace complète du traitement de la tâche par la règle juste».

Les propositions didactiques découlant des études de Matz sont en revanche plus difficiles à cerner: s'agit-il de mieux aiguillonner les techniques naturelles d'extrapolation des élèves par une présentation d'exercices ou de situations judicieuses? ne convient-il pas également de repenser l'enseignement de l'algèbre en trouvant des situations qui permettent à l'élève d'opérer les changements conceptuels nécessaires?

Dans les études réalisées par Cauzinille, Mathieu et Resnick et par Booth, les propositions sont clairement énoncées. Cauzinille, Mathieu et Resnick proposent d'intervenir sur la maîtrise de la sémantique des opérations et de leurs propriétés, par une extension des connaissances (propriétés des opérations, entiers relatifs...) et du tissu relationnel. Booth déplore le retrait dans les programmes d'enseignement des items visant une compréhension structurale des mathématiques (lois des nombres, opérations inverses, associativité et commutativité , distributivité).

Nous sommes mis en présence de propositions variées qui, dans la plupart des cas, émanent d'une interprétation du cadre d'analyse des erreurs, mais qui nous apparaissent, de prime abord, négliger l'histoire scolaire de ces erreurs. Tel est le cas, il nous semble, des propositions concernant l'extension des connaissances sur les propriétés des

opérations, sur les lois des nombres. Les propositions de remédiation ou de correction des règles fausses nous apparaissent également de même type.

Dans plusieurs cas, le raisonnement apparaît le suivant: puisque les erreurs des élèves révèlent une incompréhension des propriétés des opérations, il convient de mieux enseigner ces propriétés. Les conduites des élèves, il est évident, transgressent les lois des opérations. Ces transgressions relèvent par ailleurs de représentations des tâches d'écritures numériques et littérales, de connaissances sur ces écritures et d'habitus de traitement de ces écritures. Ces différents éléments composent la trame scolaire des savoirs des élèves. Il importe d'en tenir compte.

Il est tout aussi essentiel de s'interroger davantage sur la signification de l'expression *compréhension des propriétés des opérations et des nombres.* Quelle compréhension l'élève peut-il construire au cours des situations qui sont celles de l'enseignement de l'arithmétique au primaire et de l'algèbre au secondaire? Quelles situations en arithmétique et en algèbre pourraient engager l'élève dans un tel processus de construction?

En ce qui concerne les propositions de remédiation ou de correction des règles fausses, nos interrogations sont multiples. On ne voit pas bien comment cette entreprise de correction pourrait réussir. Comme le font remarquer Brun, Conne et Retchitzki (1988a), le traitement didactique des erreurs évitant *«autant les aspects notionnels sous-jacents que les aspects conceptuels sous-jacents, ne fait que recentrer le sujet sur le fonctionnement de son calcul. On connaît mieux les erreurs mais cette connaissance ne donne pas les moyens d'agir sinon en représentant la séquence de règles.»* (p. 4). Ce que nous révèle les règles fausses sont en fait des représentations spécifiques de tâches, représentations qui sont produits de connaissances élaborées à travers une kyrielle de tâches; ces tâches font partie des micro-mondes (Lawler et Yazadani, 1987) dans lesquelles opèrent les connaissances. Agir sur les erreurs en faisant abstraction de ces conditions de réalisation des connaissances nous apparaît ainsi amputer ces erreurs de leurs liaisons, de leurs significations essentielles.

On peut aussi s'interroger sur l'exhaustivité des règles à laquelle, dans leur fonctionnement, les systèmes de remédiation doivent prétendre. Les études réalisées par Brun et Conne (1990) sur les erreurs en calcul arithmétique font ressortir, sans équivoque, l'utopie d'une telle prétention.

L'intérêt principal de ces études sur les erreurs est toutefois non négligeable; elles nous convient à une réflexion sur les différences entre arithmétique et algèbre, entre calculs numériques et littéraux, entre conduites des élèves en arithmétique et en algèbre. Énumérons à cet effet, certaines des différences relevées dans notre lecture des publications précédentes et dans l'étude synthèse réalisée par Kieran (1989):

1) l'essence de l'algèbre est la compréhension de la nature structurale des relations mathématiques et des procédures;

2) l'arithmétique est procédurale ; en algèbre, les procédures font partie des objets (ex.: $x^2 + 2x + 1$);

3) accepter en algèbre de suspendre l'évaluation des opérations constitue une rupture fondamentale avec l'arithmétique;

4) pour résoudre des problèmes arithmétiques, les élèves ont recours à des méthodes différentes de celles qui sont attendues dans la résolution de problèmes d'algèbre. En arithmétique, l'élève effectue des comptages, des ajouts, des

combinaisons de quantités, des traitements de nombres naturels,... dans le but de produire une quantité, un nombre et ce produit obtenu ne porte pas de «mémoire de la manière dont il a été obtenu et est ainsi jugé indépendamment de sa production». En algèbre, au contraire, produit et production doivent être liés et examinés: «Ainsi, si les élèves ne reconnaissent pas que le nombre total d'objets dans deux collections contenant 5 et 8 objets respectivement peut être écrit 5 + 8 (plutôt que 13), il est fortement improbable qu'ils sauront reconnaître que a + b représente le nombre total d'objets dans des collections contenant a et b objets.» (Kieran *et al.*, 1990, p. 99; traduction des auteurs);

5) le signe = est interprété ainsi en arithmétique: «do something signal»; ce qui entraîne le rejet d'identités et d'équations de types: a) 4 + 3 = 6 + 1; b) 2x + 3 = x + 4.

Nous pourrions bien sûr commenter chacune de ces déclarations; nous nous contenterons de quelques remarques à propos de certaines d'entre elles.

La seconde déclaration associe aux différences entre les écritures numériques et littérales des différences dans les pratiques de traitement de ces écritures. Dire que les procédures font partie des objets des expressions littérales c'est en effet indiquer que ces objets portent une information sur leurs constructions, ce qui n'est pas le cas pour les objets de l'écriture numérique.

La quatrième déclaration commande plusieurs remarques. Il est vrai qu'en résolution de problèmes arithmétiques, la production d'une quantité constitue souvent le seul objectif identifiable. Il est aussi pertinent d'ajouter que cette quantité produite ne porte pas de mémoire de la manière dont elle a été obtenue et que cela constitue une différence entre les traitements arithmétique et algébrique. On pourrait pousser plus loin cet examen et ajouter qu'en arithmétique, la production d'un nombre annonce la fin d'un traitement tandis qu'en algèbre, la fin d'un traitement est une relation, donc un objet composé.

Enfin, la conclusion qui découle des remarques précédentes sur l'arithmétique et l'algébrique (Ainsi, si les élèves...) est cruciale et mérite d'être explicitée. En effet, dans le cadre d'une pratique arithmétique, on ne voit pas pourquoi le nombre total d'objets dans deux collections pourrait être désigné par une addition des nombres, puisque ces nombres sont des mesures connues de ces collections. En revanche, dans le contexte algébrique, reconnaître que «a + b» représente le nombre total d'objets dans des collections contenant a et b objets, c'est il nous semble reconnaître que l'expression «a + b» montre bien la relation entre le nombre total d'objets et les collections; c'est de plus admettre l'impossibilité de réaliser la somme. Rappelons à ce sujet les propos de Condillac (1798; voir Auroux et Chouillet, 1981, p. 302):

> «Ne seroit-ce pas une absurdité de prendre en arithmétique 2 + 4 + 8 pour la somme de 2 + 4 + 8? On seroit donc absurde en algèbre, si l'on croyait avoir trouvé la somme d'une addition lorsqu'on auroit écrit
>
> $$\begin{array}{l} a + b + c \\ \underline{d - f - g} \\ a + b + c + d - f - g \end{array}$$
>
> L'expression plus abrégée qu'on nomme *somme*, suppose donc que plusieurs termes semblables se réunissent en un seul, comme a + a = 2a, ou que des termes se détruisent par l'opposition des signes, comme + b - b = 0. »

L'ENSEIGNEMENT DES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES DANS UN CONTEXTE D'INTRODUCTION À L'ALGÈBRE

Les réserves que nous avons exprimées au sujet du diagnostic, de l'interprétation, de la prévention ou de la remédiation des erreurs des élèves dans le traitement d'écritures numériques et littérales, n'ont pas pour objectif de contester l'importance de ces erreurs. Ces erreurs transgressent les lois des opérations et témoignent d'un rapport particulier aux écritures numériques et littérales et aux savoirs mathématiques. Dans un contexte d'introduction à l'algèbre, ce rapport aux écritures doit être analysé.

1. Les rapports des élèves aux écritures numériques et littérales et aux savoirs mathématiques

Dans son mémoire sur «Le problème du zéro», Pascal (1980) propose une analyse des écritures formelles (numériques et littérales) qui éclaire notre compréhension des erreurs des élèves dans le traitement de ces écritures. Elle rappelle que:

> «Toute écriture formelle apporte de l'information (ou, plus exactement, porte de l'information) sous au moins deux formes. Soit, l'écriture 16-4; elle a un référent (dont elle est un nom) qui est le nombre entier douze, et qu'elle désigne; telle est l'information désignative... Par ailleurs, cette expression porte une information ostensible, qui peut varier sans que varie l'information désignative associée: l'expression formelle 2 x 6 apporte la même information désignative, mais elle ne montre pas la même chose. De ce que montre l'expression 16 - 4, je déduirai immédiatement que le nombre qu'elle désigne est inférieur à 16; tandis que de l'expression 2 x 6 je tirerai que le nombre qu'elle désigne est divisible par 6.» (p. 88)

Cette analyse de l'écriture n'est pas sans évoquer celle de Condillac (1798: voir Auroux et Chouillet, 1981, p. XXI):

> «Une expression peut prononcer une différence (*huit*) ou l'indiquer (*neuf moins un*). L'indication est la manifestation dans le sens de l'expression de la procédure opératoire engendrant la quantité à laquelle elle réfère; la prononciation n'est qu'une nomination.»

Plusieurs des erreurs des élèves dans le traitement des écritures littérales témoigneraient, selon Pascal, d'une tendance à conserver les différences ostensibles entre les écritures. L'origine de cette attitude de l'élève est à chercher dans son rapport aux situations de calcul (habitus scolaire). Ainsi, l'apprentissage des calculs numériques et algébriques est généralement sous la contrainte de règles prescrites par l'enseignant: procédures algorithmiques (ex.: calcul numérique, résolution d'équations du second degré,...) ou «surcodées» (ex.: factorisation). Ces règles, le maître les présente sous la forme d'actions de traitement d'écritures thématisées et contrôlées par des connaissances variées, multiples, mais, qui ne sont qu'une partie de celles que l'élève devra utiliser ou acquérir pour pouvoir reproduire les actions du maître. Les interactions maître-élève se font à propos de ces actions de traitement d'écritures; le maître décode les traitements de l'élève et en infère les règles; l'élève de son côté agit sur les écritures et accommode au besoin ses actions, tenant compte du regard du maître sur son traitement d'écritures.

L'élève ne peut difficilement se fier aux règles qu'il pourrait construire (qu'il construit) et qui pourraient être mathématiquement valides; son *acculturation scolaire réussie* (selon Pascal) en dépend. *«Cette quasi-nécessité d'un contrôle ostensible enchaîne le regard de l'élève à l'expression formelle des écritures sur lesquelles il doit calculer»* (p. 102). La conservation des différences ostensibles dans les transformations d'écritures (ex.: 0 x a = a) semble alors le moyen privilégié par l'élève pour contrôler la *non-réversibilité* (du point de vue de l'élève) des transformations du calcul.

Cette lecture des conduites des élèves, en des termes différents et à propos d'un domaine autre des mathématiques, est également effectuée par Kieren (1988, p. 177; traduction des auteurs):

> «En ce qui concerne les propositions précédentes sur la connaissance des mathématiques, il est suggéré ici qu'une focalisation prématurée sur la syntaxe des décimaux et des opérations sur les fractions rend le symbolisme technique inadéquatement concret. Ainsi, les élèves pensent que leurs raisonnements sur les opérations sur les fractions et les décimaux proviennent de la nature des symboles sur papier. Cela conduit les élèves à rechercher des régularités concrètes dans les symboles, plutôt que de penser que les opérations sur les nombres rationnels sont le produit de leur activité mentale en tant qu'une abstraction symbolisée d'action/objets et que cette activité est représentée par le symbolisme des algorithmes. Ce formalisme prématuré explique quelques-uns des résultats des recherches sur l'addition de fractions et sur les algorithmes inappropriés développés sur les fractions décimales.»

Ces explications des conduites des élèves dans le traitement d'écritures permettent, il nous semble, une seconde lecture des erreurs de jugement d'expressions numériques et littérales relevées par Cauzinille, Mathieu et Resnick (1987) et Booth (1989). Ainsi, les élèves qui déclarent que l'ordre des lettres ne compte pas dans les expressions littérales, semblent se satisfaire d'une lecture ostensible des expressions. L'équivalence reconnue par les élèves entre les expressions (19,7 - 3,8) + 7,4 et (3,8 + 7,4) - 19,7 pourrait également témoigner de cette tendance à conserver les différences ostensibles. Ainsi, à défaut de se saisir des écritures comme des éléments d'un dispositif pour l'évocation et le déroulement de pratiques donnant un sens à l'activité mathématique, les élèves se satisfont d'une analyse «syntaxique». Pour clarifier cette dernière interprétation, rappelons les propos de Chevallard (1991):

> «Une pratique ne peut exister et se dérouler que parce que les acteurs peuvent constamment la "lire", "voir" ce qu'ils font et identifier les gestes qui permettent de la continuer. Ce décodage n'est possible qu'à travers le rapport des acteurs aux objets de l'activité, et plus précisément grâce à un certain sémiotisme des praxèmes, sémiotisme qui permet notamment que certains de ces praxèmes puissent fonctionner comme des emblèmes de l'objet.» (p. 114)

Invoquer, dans les cas précédents, l'incompréhension des propriétés des opérations nous apparaît alors masquer les rapports aux écritures et aux tâches qui recouvrent les représentations mathématiques des élèves. Contrairement à l'adulte, ces élèves semblent alors peu préoccupés par les opérations en cause ou encore, par les informations portées par ces expressions.

Mais, si une telle interprétation est défendable, une question surgit spontanément: Comment amener les élèves à traiter les informations et non pas uniquement les écritures? Avant de discuter de notre réponse à cette question, il nous semble intéressant de prolonger davantage notre examen des conduites des élèves en arithmétique et en algèbre.

2. Les rapports des élèves à l'arithmétique et à l'algèbre

Plusieurs des conduites des élèves en arithmétique et en algèbre semblent marquées par ces rapports aux écritures numériques et littérales. Dans leur recherche sur les erreurs des élèves devant réaliser par écrit des divisions, Brun, Conne, Schubauer et Retchitzki (1988a, 1988b) montrent comment et, souvent d'une manière très peu économique, les élèves font appel à leurs connaissances numériques et numérales pour effectuer des divisions à la manière du maître. De cette manière, ils ne semblent toutefois n'avoir bien souvent retenu que des formes et des lois d'écritures intermédiaires ou finales en regard des entrées successives aux dividendes, diviseurs et quotients. Ainsi, effectuer une division est du point de vue de l'élève un jeu d'activation de transformations qui lui permettent à chaque étape du processus d'apprêter les écritures, de reconnaître une écriture ostensible qu'il a retenue de l'algorithme enseigné en classe, organisant ainsi les informations afin de pouvoir opérer (ex.: partition du dividende). Dans le déploiement de ces écritures, il fait appel à de nombreuses connaissances numériques et numérales qu'il doit sans cesse accommoder, puisque ces connaissances sont liées à des micro-mondes différents (ex.: le micro-monde de la numération; le micro-monde des additions et des soustractions; le micro-monde des problèmes de multiplication et de division). Il ne lui viendra pas spontanément à l'idée de vérifier sa réponse, puisque son statut ne dépend que du processus de transformations des écritures qui avec cette réponse a pris fin. Voudrait-il le faire, il en serait probablement incapable sans refaire à nouveau le calcul, ne disposant pas de règles explicites mais de règles implicites soudées à l'action.

On a toutes les raisons de penser que cet habitus développé en arithmétique se transportera en algèbre. Plus encore, il sera cristallisé, en raison de la perte, du point de vue de l'élève, de l'information que portaient les nombres en arithmétique. Cette information permettait, à certaines occasions, de lier information ostensible et information désignative, en un mot de construire du sens. L'algèbre se présentera alors uniquement comme une écriture ostensible dont le sens échappe en raison de l'incapacité de référer aux informations véhiculées par cette écriture. En algèbre encore plus qu'en arithmétique, *«la lecture ostensible (la lexis) devient dominante lorsqu'elle constitue la seule pratique des élèves à propos des transformations d'écritures.»* (Pascal, 1980, p. 107)

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES DANS UN CONTEXTE D'ENSEIGNEMENT INTRODUCTIF À L'ALGÈBRE

Les développements théoriques précédents sur les rapports des élèves à l'arithmétique et à l'algèbre permettent, selon nous, de mieux comprendre leurs erreurs. L'enseignement peut-il tirer profit de la connaissance de ces rapports et de leurs effets? Comment transformer au besoin ces rapports? Quelles situations didactiques faut-il imaginer pour contraindre les élèves à un examen des informations ostensibles et désignatives que véhiculent les écritures numériques et littérales?

Notre recherche s'attaque à ce problème et propose un enseignement visant une construction formelle des propriétés des opérations arithmétiques, faisant intervenir

l'algèbre à titre d'outil privilégié de cette construction. Notre choix est grandement influencé par les études théoriques et pratiques suivantes:

1) les études de Chevallard sur l'enseignement de l'algèbre (Chevallard, 1984; Chevallard et Conne, 1984; Chevallard, 1989);

2) les études de Brousseau sur les situations didactiques (1986);

3) les études de Douady sur la dialectique outil-objet et les jeux de cadres (Douady, 1986);

4) les études de Vergnaud (1991) sur la théorie des champs conceptuels;

5) les théories piagétiennes (Inhelder et *al.*, 1977; Piaget, 1974, 1981) et néo-piagétiennes (Case, 1985; Siegler, 1983) sur le développement de la pensée et l'épistémologie génétique;

6) les études sur la mémoire, l'acquisition de connaissances, la résolution de problèmes et le raisonnement scientifique (Agnoli et Krantz, 1989; Klahr et Dunbar, 1988; Larkin et Simon, 1987).

1. Une construction formelle des propriétés des opérations arithmétiques

L'expression *formelle* qui caractérise la construction des propriétés des opérations arithmétiques n'est pas accessoire:

1) elle renvoie à l'algèbre en tant qu'outil de formalisation des propriétés;

2) elle se réclame de l'épistémologie génétique, en référant à l'activité du sujet qui recourt à des outils formels de raisonnement (logique des propositions, hypothèses, déductions) et en dissociant l'abstraction empirique, qui ne peut conduire à une construction opératoire, de l'abstraction réfléchissante qui rend possible une telle construction. Dans le texte qui suit, pour éviter toute confusion entre les références au domaine de la didactique des mathématiques et à celui de la psychologie génétique, nous utiliserons le terme «algébrique» dans le premier cas et le terme «formel», dans le second cas.

Par ailleurs, envisager une telle construction implique:

1) qu'il soit possible de construire des situations d'enseignement pensées pour des élèves débutant en algèbre et qui mettent en scène des connaissances algébriques sur les propriétés des opérations;

2) que les élèves disposent de processus formels de raisonnement.

Les théories et les méthodologies développées en didactique des mathématiques et en psychologie génétique nous permettent de répondre positivement à la première condition. En revanche, la seconde condition pose un problème. Si les études de la psychologie génétique sur la pensée formelle nous permettent de supposer que les processus formels de raisonnement sont constitués chez un bon nombre des élèves concernés par notre recherche, plusieurs recherches (Politzer, 1990) en psychologie cognitive montrent que dans des contextes différents de ceux des épreuves piagétiennes, plusieurs élèves de cet

âge commettent des erreurs de raisonnement inférentiel. La mise en forme et le contrôle de processus de raisonnement formel semblent alors dépendre des contextes.

Nous pensons toutefois que le contexte qui est le nôtre peut contraindre à un raisonnement formel, ce raisonnement étant alors associé à la réussite des tâches. Nous croyons cependant essentiel d'insister sur la perspective à long terme qui est la nôtre dans cette recherche; notre optique n'est pas de produire des résultats qui s'ajoutent aux résultats déjà disponibles mais bien davantage de susciter des réflexions critiques sur la perspective d'enseignement envisagée.

2. L'algèbre: un outil privilégié dans la construction des propriétés des opérations arithmétiques

Dans la construction des propriétés des opérations arithmétiques, l'algèbre constitue un outil privilégié. Cette déclaration mérite d'être commentée.

Douady (1986) distingue le caractère outil et objet d'un concept. Parler du caractère outil d'un concept c'est indiquer qu'il intervient dans la résolution de problèmes variés. Cette intervention prend un sens en fonction de la nature des problèmes ou encore, en fonction des relations de ce concept avec d'autres concepts impliqués dans les problèmes. Pour cette raison, comme le souligne Douady, «du point de vue outil, on ne peut parler d'un concept mais d'un réseau de concepts gravitant éventuellement autour d'un concept principal» (p. 10). La notion de champ conceptuel définie par Vergnaud (1991) montre bien ces liaisons.

Le caractère outil lie un concept aux problèmes dans lesquels ce concept est utilisé ainsi qu'aux autres concepts impliqués dans ces problèmes. Pour devenir objet, un concept doit être libéré de son contexte d'élaboration et d'application; il doit être «décontextualisé» pour devenir objet de savoir.

Dans la perspective d'enseignement qui est la nôtre, affirmer le caractère «outil» de l'algèbre comporte certains risques. En effet, comme le rappelle à juste titre Sierpinska (1992), si l'algèbre est vue comme un outil de généralisation des connaissances mathématiques, cela suppose que ces connaissances existent. Dans notre recherche, selon les résultats des études décrites antérieurement, il est plus que probable que certaines de ces connaissances fassent défaut aux élèves concernés. Il est encore plus évident que les concepts définissant un premier savoir en algèbre ne soient pas encore construits chez ces mêmes élèves. Pourquoi maintenir alors notre déclaration sur le rôle de l'algèbre?

Faire intervenir l'algèbre à titre d'outil privilégié ne signifie pas que d'autres concepts (outils et objets) appartenant à d'autres cadres (ex.: arithmétique...) ne puissent intervenir. Les élèves concernés par notre recherche possèdent un bagage de concepts numériques qu'ils peuvent mettre à profit pour donner un sens aux écritures littérales et développer ainsi des concepts (outils et objets) algébriques. Les recherches conduites par Douady (1986) montrent la richesse des jeux de cadres dans l'enseignement des mathématiques.

3. Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales: une stratégie d'enseignement

Notre analyse des erreurs des élèves dans le traitement d'écritures mathématiques, numériques et littérales, conclut à l'enchaînement privilégié du regard des élèves aux formes de ces écritures au détriment d'une identification satisfaisante des informations

ostensibles et désignatives qu'elles portent. Les manipulations d'écritures s'apparentent ainsi souvent à celles que pourraient produire un automate ne disposant que d'un lexique peu élaboré et de quelques règles formelles de production de phrases ou de séquences lexicales. Tel est le cas, il nous semble, en contextes de résolution d'équations algébriques et de comparaison d'écritures algébriques.

Ce rapport des élèves aux écritures, nous avons essayé de mieux le comprendre en le situant dans le cadre des échanges maître-élèves. Or, dans ces échanges, l'écriture constitue pour l'enseignant un outil de présentation des contenus et d'évaluation de la maîtrise de ces contenus chez les élèves. L'élève, de son côté, interprète les écritures de l'enseignant, les mémorise également et enfin, les produit afin de montrer ce qu'il sait. Que dans ces conditions, s'opère progressivement un clivage entre signifiants et signifiés mathématiques n'a rien d'étonnant. Car, comme le souligne Vergnaud (1991): «Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu» (p. 158). Nous pourrions compléter ces propos en suggérant que, dans les pratiques d'enseignement examinées antérieurement, des signifiés «extra-mathématiques» se greffent aux signifiants que sont les écritures mathématiques.

Comment concevoir alors les situations d'enseignement de l'algèbre pour lier sens et écritures? Pour identifier quelques éléments de réponse à cette question, nous proposons d'examiner quelques recherches sur les caractéristiques et les fonctions des représentations.

Le langage naturel, les écritures mathématiques, les diagrammes, les schémas, les graphiques, sont des représentations qui remplissent diverses fonctions; de plus en plus d'études sont maintenant conduites dans le but de mieux définir ces fonctions. Et pour cause... Comment en effet peut-on examiner l'activité intellectuelle complexe en faisant abstraction des productions symboliques qui accompagnent cette activité? De notre bref examen des recherches en ce domaine, nous retenons pour le moment quelques résultats en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques.

Agnoli et Krantz (1989) montrent que les erreurs logiques accompagnant les raisonnements sur les probabilités peuvent être réduites lorsque les adolescents ont recours aux diagrammes de Venn pour représenter les relations entre les ensembles. L'analyse théorique des contenus et des fonctions des diagrammes réalisée par Larkin et Simon (1987) en résolution de problèmes conclut aussi aux avantages «computationels» des diagrammes sur les descriptions verbales: a) le diagramme peut réunir plusieurs informations et évite ainsi des recherches peu économiques d'éléments nécessaires pour faire des inférences; b) l'information dans un diagramme est une «information localisée» et n'exige pas une référence «langagière»; c) le diagramme «supporte» perceptiblement de nombreuses actions inférentielles (traduction libre du texte en page 98). Ces chercheurs ajoutent cependant que ces avantages ne peuvent être exploités que par les sujets qui sont en mesure d'en saisir et d'en traiter les informations, voire même de les construire.

Les avantages des diagrammes sur les descriptions verbales dans l'étude précédente sont montrés dans un problème de physique (problème de poulies) et dans un problème de géométrie. Nous pensons, à l'instar de Vergnaud (1991), que le langage constitue également un outil de représentation et de raisonnement fort précieux. Le fait que cet outil fait généralement partie de la boîte à outils utilisée pour résoudre un problème et construire des connaissances fait en sorte qu'il soit facilement oublié.

Vergnaud (1991) souligne d'abord le fait que la fonction «d'aide à la pensée» du langage en mathématiques est souvent «sous-estimée» et attribue trois fonctions de représentation au langage: «- représentation des éléments pertinents de la situation; - représentation de l'action; - représentation des relations entre l'action et la situation» (p. 160). Il conclut son examen des représentations en affirmant que si le langage est un outil de pensée sur les propriétés et les relations, le symbolisme mathématique contribue à la conceptualisation, «par la transformation des catégories de pensées mathématiques en objets mathématiques».

Les outils de représentation auxquels a recours un sujet sont variés et dépendent des problèmes qu'il désire résoudre. Dans notre étude sur la construction des propriétés des opérations, en contexte d'enseignement introductif à l'algèbre, le langage symbolique ou plus précisément, les écritures littérales de calcul, est considéré comme «outil de pensée et d'action». Les études de Chevallard sur l'algèbre (1984, 1989) et d'une façon particulière, l'étude sur l'enseignement des identités remarquables (Chevallard et Conne, 1984), renforcent notre conviction concernant le rôle déterminant que le langage algébrique (l'écriture littérale) peut jouer dans la construction de connaissances sur les nombres et les opérations.

Le langage algébrique montre les relations et permet d'opérer sur ces relations dépouillées de leurs attachements numériques. Il facilite aussi une réflexion sur les opérations et sur les relations entre les nombres (et non entre des nombres) et les systèmes. Le travail cognitif peut ainsi se dérouler plus librement dans un espace théorique ou dans un espace d'hypothèses et également, dans un espace expérientiel (Klahr et Dunbar, 1988), le sujet pouvant toujours transformer les écritures littérales en écritures numériques. La coordination des informations dans les deux espaces peut alors faciliter la mise en forme d'un raisonnement formel et conséquemment, la construction algébrique des propriétés des opérations arithmétiques.

Le langage algébrique constitue donc, à notre point de vue, un levier de la pensée formelle qui agit sur des transformations et des relations, libérée de supports concrets définis, tout en étant capable d'envisager les concrétisations possibles de ces transformations ou de ces relations (Piaget, 1981).

C'est dans cette optique que nous formulons l'hypothèse suivante: le traitement de formes d'écritures littérales peut donner accès aux contenus de ces écritures, s'il constitue un moyen approprié (voir le seul moyen) de résoudre des problèmes ou de construire des solutions à ces problèmes. Cette dernière condition doit etre satisfaite; dans ce cas, les écritures littérales, tout en retenant leurs fonctions de représentation et de communication, acquièrent une autre fonction heuristique: celle d'être des mémoires économiques d'opérations à réaliser et à examiner. Cette vision didactique des écritures se démarque fondamentalement de la vision courante qui consiste à attribuer aux écritures une fonction de codage, de transcodage de solutions à des problèmes, ces écritures étant alors souvent des compromis faits au maître: «Dans ce cadre, les formulations semblent plutôt destinées au maître, et soumises à son jugement.» (Laborde, 1982, p. 25)

Bibliographie

Agnoli, F., Krantz, D.H. (1989). Suppressing natural heuristics by formal instruction: The case of the conjonction fallacy. *Cognitive Psychology, 21(4)*, pp. 515-550.

Auroux S., Chouillet, A-M. (1981). *Condillac - La langue des calculs*. Presses Universitaires de Lille.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, U.K.: NFER-Nelson.

Booth, L.R. (1989). Grade 8 students' understanding of structural properties in mathematics, *Actes de la 13e conférence internationale Psychology of mathematics education, 1*, pp. 141-148.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques, 7/2*, pp. 33-115.

Brun, J., Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations, *Éducation et recherche, 3*, pp. 261-286.

Brun, J., Conne, F., Schubauer, R., Retchitzki, J. (1988a). *L'étude des algorithmes de calculs dans la transmission et la constitution des connaissances numériques*. Swiss National Fund for Scientific Research, no-11-25448-88.

Case, R. (1985). *Intellectual Development: Birth to Adulhood*. New York: Academic Press.

Cauzinille-Marmeche E., Mathieu, J., Resnick, L. (1987). L'intégration de nouvelles connaissances: entre arithmétique et algèbre. *Journal européen de psychologie de l'éducation, 2, (1)*, pp. 41-57.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège- deuxième partie: perspectives curriculaires: la notion de modélisation, *Petit x, (19)*, pp. 43-72.

Chevallard, Y., Conne, F. (1984). Jalons à propos d'algèbre. *Interactions didactiques, 3*, pp. 1-54.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, (122)*, Laboratoire IMAG, pp. 103-117.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en didactiques des mathématiques, 12/2*.

Conne, F., Brun, J. (1988b). *Content and process: the case of teaching written calculation at primary school*. Research Report, Swiss National Fund for Scientific Research, no. 1125448-88.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques-une réalisation dans tout le corpus scolaire*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris VII.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7,(2)*, pp. 5 -31.

Inhelder, B., Garcia, R., Voneche, J. (1977). *Epistémologie génétique et équilibration, Hommage à Jean Piaget*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Inhelder, B., Piaget, J. (1970). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Presses Universitaires de France, 3e édition.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, pp. 317-326.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. *Actes de la 13e conférence internationale Psychology of mathematics education, 2*, pp. 163-171.

Kieran, C., Booker, G., Filloy E., Vergnaud, G., Wheeler, D. (1990). Cognitive Processes involved in learning school algebra. *In:* P. Nesher et J. Kilpatrick (Eds): *ICME Studies*, Cambridge University Press, pp. 96-113.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: its intuitive and formal development. *In:* National Council of Teachers of Mathematics, (Eds): *Number concepts and operations in the middle Grades,* N. J.: Lawrence Erlbaum, pp. 162-181.

Klarhr, D., Dunbar, K. (1988). Dual space search during scientific reasoning. *Cognitive Science, 12,(1),* pp. 1-48.

Kuchemann, D.E. (1981). Algebra. *In:* K. M. Hart (Ed.): *Children's understanding of Mathematics: 11-16,* London: Murray.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique.* Thèse de doctorat, Université scientifique et médicale, Institut national polytechnique de Grenoble.

Larkin, J.H., Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science, 11(1),* pp. 65-100.

Lawler, R.W., Yazadani, M. (1987). *Artificial intelligence and education, Volume I: Learning environments and tutoring systems,* N. J.: Norwood, Ablex.

Lemoyne, G. (1991). Situations Logo de construction formelle des propriétés des opérations arithmétiques. *In:* J. L. Gurtner et J. Retschitzki (Eds): *Logo et apprentissages.* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, pp. 135-146.

Lemoyne, G., Conne, G., Brun, J. (1991). Connaissances arithmétiques et écritures algébriques chez des élèves de 13 à 15 ans. *Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique (122).* Université Joseph Fourier, Grenoble: Laboratoire LSD2-IMAG, pp. 119-138.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior, 3,* pp. 93-166.

Newella, Simon H.A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

Noelting, G. (1982). *Le développement cognitif et le mécanisme d'équilibration.* Québec: Gaétan Morin

Pascal, D. (1980). *Le problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur.* Mémoire, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant.* Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1947). *La construction de l'intelligence.* Paris: Armand Colin.

Piaget, J. (1974). *Réussir et comprendre.* Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1981). *Le possible et le nécessaire, vol.1: l'évolution des possibles chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1981). *Le possible et le nécessaire, vol. 2: l'évolution du nécessaire chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Politzer, G. (1990). L'activité inférentielle. *In:* J.F. Richard, C. Bonnet et R. Ghiglione (Eds): Traité de psychologie cognitive 2. *Le traitement de l'information symbolique.* Paris: Dunod, Bordas, pp. 106-128.

Siegler, R.S. (1983). Information processing approach to development. *In:* P.H. Mussen (Ed.): *Handbook of Child Psychology, 4,* pp. 129-211.

Sierpinska, A. (1992). Sur la compréhension en mathématiques, avec une attention particulière portée à l'algèbre. *Actes du colloque portant portant sur sur l'émergence de l'algèbre,* CIRADE, Université du Québec à Montréal, pp. 83-109.

Sleeman, D.H., Brown, J.S. (1982). *Intelligent Tutoring Systems.* N.Y.: Academic Press.

Sleeman, D.H. (1986). Introductory Algebra: A case study of student misconceptions, *Journal of mathematical behavior, 5,* pp. 25-52.

Sleeman, D.H. (1987). Pixie: a Shell for developing intelligent tutoring systems. *In:* R.W. Lawler et M. Yazadani (Eds): *Artificial intelligence and education, Volume I: Learning environments and tutoring systems,.* N.J.: Norwood, Ablex, pp. 239-263.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10/2.3,* pp. 138-170.

SUR LA COMPRÉHENSION EN MATHÉMATIQUES, AVEC UNE ATTENTION PARTICULIÈRE PORTÉE À L'ALGÈBRE

Anna Sierpinska
Concordia University
Montreal

INTRODUCTION

Examinons d'abord l'opinion suivante:

«... du point de vue de l'interprétation en tant que discipline, le processus psychologique de compréhension n'est ni un problème théorique ni un théorème pratique. Chacun qui pense avoir compris une expression de langage l'a certainement comprise dans un sens ou un autre. Donc, le sujet de cette discussion ne sera pas comment comprendre mais bien comment juger et critiquer ce que l'on comprend. Le problème est de décider si notre entendement est probablement correct. Cela est, finalement, un problème de validation ...» (Hirsch, 1967, p. 133)

On ne serait pas étonné d'entendre les mêmes propos au sujet non pas de la discipline d'interprétation mais de la didactique des mathématiques.

En didactique des mathématiques «comprendre» veut toujours dire «bien comprendre», aussi bien pour l'enseignant que pour le chercheur. Dans un projet d'enseignement ou d'apprentissage, on n'est pas intéressé à n'importe quelle compréhension. On vise une compréhension bonne, correcte, profonde, etc. Alors, on fait des évaluations des apprentissages, on identifie les «misconceptions» des élèves, ... Et lorsqu'on théorise à propos de la compréhension, en construisant des «modèles de compréhension», c'est souvent en termes de «niveaux» qu'on les conçoit.

Si je me propose cependant, dans cet article, de revoir quelque peu ce «non-problème» de compréhension, c'est non pas tellement par esprit de contradiction, mais plutôt parce que je pense que l'on ne peut pas parler de «niveaux» de quelque chose sans savoir un peu ce qu'est ce quelque chose. On risque de construire des catégorisations de niveaux de compréhension où le sens de «compréhension» changerait d'un niveau à l'autre. Par exemple: niveau A comprendrait une classe d'actes de compréhension, niveau B - une classe de manières de comprendre, niveau C - une classe d'opérations mentales impliquées dans la compréhension ...

Je ne dis pas que les questions de niveaux de compréhension, d'évaluation et de validation des manières de comprendre ne sont pas importantes en didactique de mathématiques. Je pense seulement qu'on serait mieux équipés pour les attaquer si on réfléchissait d'abord à quelques questions plus fondamentales concernant la compréhension en tant que telle.

En faisant l'hypothèse qu'un processus de compréhension, qui se developpe dans le temps, est composé d'actes de compréhension liés, comme dans un treillis, par des raisonnements divers, dont les principaux sont la validation et l'explication, j'accorde, à l'acte de compréhension, le statut d'élément fondamental à partir duquel s'articulent les connaissances. C'est donc sur l'acte de compréhension, sa nature, ses composantes, ses conditions nécessaires que je me propose de réfléchir dans le texte qui suit, en développant et synthétisant les idées et les questions formulées déjà dans un article antérieur (Sierpinska, 1990).

Cette réflexion va me servir ensuite de cadre de référence pour engager une discussion sur les diverses approches qu'on a en didactique des mathématiques relativement à la problématique de la compréhension.

I - L'ACTE DE COMPRÉHENSION

Parmi les diverses activités de l'esprit humain comment distinguer celles qui sont des actes de compréhension?

En cherchant la réponse chez les philosophes et psychologues on trouve les suggestions suivantes.

Un acte de compréhension est un acte qui consiste à trouver un principe unifiant, une relation qui fonde ce que nous voulons comprendre.

Par exemple, on comprend le phénomène de l'arc-en-ciel par le principe de la dispersion de la lumière solaire par réfraction et réflexion dans les gouttes d'eau de pluie. Ou: on comprend les nombres: entiers, rationnels, réels, complexes etc. comme des constructions basées sur l'idée de la structure-quotient par une relation d'équivalence: on obtient les entiers comme classes d'abstraction de la relation entre des couples de naturels: $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a+d=b+c$; les rationnels - comme classes d'abstraction de la relation entre les couples d'entiers: $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Les réels peuvent se concevoir comme des classes d'abstraction entre des suites convergentes de rationnels: deux suites sont équivalentes si elles ont une même limite. Les complexes sont des couples de réels, etc.

Nous trouvons cette suggestion de concevoir un acte de compréhension comme un acte de «prendre ensemble», ou de concevoir quelque chose comme un tout à la base d'un même principe dans les éléments, chez Leibniz *(Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain)*, qui dit, dans la polémique qu'il entreprend avec Locke sur les sources de notre entendement, que la formation des idées générales ne se fait pas par un assemblage de sensations ou de réflexions isolées, mais bien par la découverte de ce qui fait l'unité de cette idée générale.

> «Philalethes: The "composition" of simple ideas to make complex ones is another operation of our mind. This may be taken to cover the faculty of enlarging ideas by putting together several of the same kind, as in forming a dozen out of several units.
>
> Theophilus: This unity of the idea of an aggregate is a very genuine one: but fundamentally we have to admit that *this unity that collections have is merely a respect or relation*, whose foundation lies in what is the case within each

of the individual substances taken alone. So the only perfect unity that these "entities by aggregation" have is a mental one, and consequently their very being is also in a way mental, or phenomenal, like that of a rainbow...

Theophilus: It may be that "dozen" and "score" are merely relations and exist only with respect to the understanding. The units are separate and the *understanding takes them together*, however scattered they may be... and the very reality of all things other than simple substances consists only in there being a *foundation* for the perceptions or phenomena of simple substances.» (New Essays on Human Understanding, BKII, Ch xii)

Un acte de compréhension range l'objet de notre compréhension (i.e. ce qui est à comprendre, ou ce qui est en train d'être compris) *dans l'ordre de nos idées ou de nos expériences*. On peut, par exemple, identifier l'objet de compréhension comme un cas particulier d'une catégorie plus générale; ou identifier cet objet comme une généralisation d'un autre.

Par exemple, lorsqu'on rencontre une vitrine brisée en se promenant dans la rue et qu'on se dit: «Ah! Il a dû y avoir un hold-up» - on a bien l'impression d'avoir compris l'événement. Ou lorsqu'on rencontre une inscription comme «y = 2x - 3» et que l'on pense: «Ah! c'est une fonction linéaire», ou : «C'est ce qu'on a fait hier en classe. Il faut faire un tableau et puis dessiner un graphique». Ou encore lorsqu'on rencontre une inscription «y = mx + b» et que l'on pense: «En fait, toutes les fonctions qu'on a faites en classe étaient de cette forme-ci.»

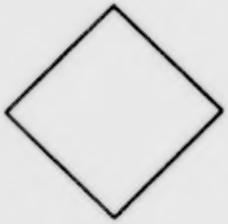
Pour Locke, les opérations fondamentales de l'esprit qui entrent en jeu dans la compréhension sont celles qui permettent d'identifier les idées et de distinguer parmi celles-ci. L'ordre dans les idées, les relations entre les idées forment ce qui est à la base de tout «savoir positif», dit-il.

«... there could be no room for any positive knowledge at all, if we could not perceive any relation between our ideas, and find out the agreement and disagreement they have with one another, in several ways the mind takes of comparing them.»
(J. Locke: An Essay on Human Understanding, BK IV, Ch i, sec. 5)

Un acte de compréhension est un acte qui consiste à relier mentalement l'objet de compréhension avec un autre objet.

Par exemple, en entendant l'expression «un carré», notre pensée peut se diriger vers une image mentale (une représentation iconique, comme dirait J.S. Bruner (1973, p. 316) d'une forme carrée comme, par exemple:

mais peut-être comme:



que l'on qualifie souvent de losange.

Ou bien, nous pouvons penser qu'un carré est une figure géométrique, un quadrilatère formé d'angles droits et de côtés égaux.

Dans le premier cas, nous nous imaginons un exemple d'une catégorie. Dans le second cas, nous identifions l'objet «un carré» par *genus et differentiam specificam*.

L'idée de l'acte de comprendre quelque chose - un objet X - comme acte mental dans lequel notre pensée se dirige de cet objet X vers un autre objet, Y, a été exprimée par K. Ajdukiewicz dans sa «Logique pragmatique» (1965). Ajdukiewicz ne s'intéressait qu'à la compréhension des expressions, et il disait:

> «Nous comprenons une expression si, en l'entendant, notre pensée se dirige vers un objet différent de cette expression.» (ibidem, p. 19)

Ainsi, un acte de compréhension implique: le sujet comprenant *S*, l'objet X que *S* est en train de comprendre, l'objet Y à la base duquel *S* comprend X, l'intention *i* de comprendre, i.e. l'acte de volonté qui dirige la pensée de *S* de X vers Y; le moment t où l'acte de comprendre a lieu: [*S*, X, Y, *i*: X --->Y, t].

Acte de compréhension comme acte d'organisation (ou de réorganisation) du champ de conscience.

Les psychologues Gestaltistes appelaient un tel acte *«einsicht»* ou *«insight»*. Ils disaient que notre environnement (physique ou mental) nous apparaît comme un certain tout organisé et structuré. Certains objets en ressortent - sont mis en relief; d'autres, par contre, en constituent le fond. Parfois, un acte de compréhension se fait par la «prise de conscience», de ces objets de «fond», que l'on ne remarquait même pas jusqu'alors, comme des objets en soi, de la même façon qu'on ne remarque pas l'air et l'oxygène qui nous entourent en quantités suffisantes.

En didactique des mathématiques, cette opération de remarquer *(noticing)* a été l'objet de recherches sur l'enseignement et l'apprentissage, par John Mason et Joy Davis (1990).

Identifier quelque chose comme objet de compréhension est, en effet, un tout premier acte dans un processus de compréhension. En revenant à l'exemple leibnizien de l'arc-en-ciel, on peut penser qu'avant de le comprendre comme un phénomène de réflection et de réfraction de la lumière, il faut bien se rendre compte qu'il y a là, en effet, un

phénomène: il faut l'identifier, l'observer dans la nature. Et pour cela il faut organiser son champ de vision de telle manière que l'arc-en-ciel ressorte au premier plan.

Un autre exemple: chez des élèves du secondaire qui étudient les équations, le champ de conscience peut être organisé de telle sorte que le signe d'égalité se trouve dans le fond du champ de conscience. Ce qui est au premier plan, c'est la lettre x, peut-être son exposant, les coefficients numériques. Une élève, à qui on demandait de choisir 3 expressions, appartenant à une même classe, parmi les 4 expressions suivantes:

$$y = 2x+1, \quad x(x-1), \quad A = 1/2\ bh\ , \quad x = 2,$$

a choisi la première, la deuxième et la quatrième, en disant que ce sont des équations qu'il faut résoudre ou qui ont déjà été résolues (comme «x=2»), tandis que la troisième est une formule - qu'on peut utiliser, bien sûr, dans les problèmes, mais qui «ne change pas» (qui n'est pas supposée d'être transformée).

La conscience, disent les Gestaltistes, tend toujours à conserver un état d'équilibre. Lorsque quelque chose (une information, un nouvel élément) vient déstabiliser le champ de conscience, la pensée fera l'effort de restaurer l'équilibre avec un coût plus ou moins grand de réorganisation.

Acte de compréhension - acte d'équilibration d'une structure cognitive

Ceci est, bien sûr, une idée de Piaget, issue, comme on le voit, de la psychologie Gestalt. Ce qui demande d'être équilibré, du point de vue de la psychologie de Piaget, ce n'est plus «le champ de conscience» mais des schèmes ou des structures cognitives que le sujet construit à partir de ses actions et interactions avec l'environnement. Ces schèmes et structures qui sont à la base de l'entendement humain n'ont point le caractère d'images (idées) des objets matériels que l'on perçoit par les sens, ni de représentations de nos opérations mentales (comme abstraction, composition, discernement) mais elles sont des modèles mentaux de nos véritables actions sur l'environnement. Ces modèles, en se développant avec la maturation mentale du sujet, prennent de plus en plus la forme de structures fermées de transformations agissant dans un ensemble (Piaget, 1985).

Le sujet tend toujours à être en équilibre avec son environnement. Il a le sentiment de ne pas comprendre quand il a du mal à maintenir cet équilibre. Quand l'équilibre est restauré, on pourrait dire que le sujet a compris. Ce sont les mécanismes d'assimilation et d'accommodation qui assurent le retour à l'équilibre, dit Piaget. Dans l'assimilation, un nouvel élément est admis dans l'ensemble des objets sur lesquels la structure cognitive peut opérer. Dans l'accommodation - la structure elle-même doit subir des adaptations pour pouvoir agir dans un domaine modifié.

Acte de compréhension - acte de saisir le sens

Pour Dewey (1988, p. 152) «comprendre», «saisir le sens», «identifier un objet dans une situation où il joue un rôle pertinent» sont des manières différentes de dire la même chose.

Ainsi l'action de comprendre transforme un objet isolé en élément d'une situation, d'un tout qui, par cela même, lui confère un sens, lui procure un fondement.

En tenant compte des suggestions ci-dessus, on pourrait dire qu'un acte de compréhension est un acte intentionnel de la raison par lequel l'objet de compréhension est mis en relation avec un autre objet de manière qui laisse au sujet comprenant le sentiment de rétablir l'ordre, l'unité ou l'équilibre de ses idées. Dans tout acte de compréhension, sont impliqués: le sujet comprenant, son intention de comprendre, l'objet de sa compréhension, sa base de compréhension (une représentation, une pensée), le moment où l'acte a lieu.

II - L'OBJET DE COMPRÉHENSION

Ce sont les psychologues Gestaltistes qui ont attiré notre attention sur la nécessité de parler de l'objet de notre conscience (cf. Tomaszewski, 1986); pour eux, la conscience était toujours conscience de quelque chose (figures, objets, personnes, situations, événements). La psychologie classique ne spécifiait pas l'objet de ce «flot de conscience» (*stream of consciousness*) dont elle s'occupait. Cela ne veut pas dire que l'objet de compréhension était inexistant. Il était, simplement, très général et donc très vague et n'était pas identifié comme objet d'étude - il était dans le «fond» du champ de conscience des chercheurs. Ce qui était à comprendre, c'était le monde, l'expérience humaine, etc.

Dans l'enseignement des mathématiques, on observe aussi parfois une certaine imprécision de l'objet de compréhension. Bien que, bien sûr, un grand pas ait été fait depuis le temps où la didactique des mathématiques n'était qu'une branche de la didactique générale, sensée appliquer les principes de cette dernière à l'enseignement des mathématiques et prescrire des méthodes pour enseigner tel ou tel sujet. La didactique générale parlait de la compréhension en général, quel que soit l'objet de compréhension, et formulait des principes d'enseignement qui devaient s'appliquer à n'importe quel domaine du savoir. Il est cependant devenu clair à un moment donné que les méthodes d'enseignement devaient être spécifiques aux contenus d'enseignement, comme, visiblement, l'apprentissage est spécifique aux contenus. La pensée ne fonctionne pas de la même manière dans son effort de comprendre en mathématiques et en littérature, par exemple.

Alors on parle, par exemple, de la compréhension de la notion de nombre, des nombres décimaux, des nombres entiers ou des fractions, de la notion de limite, des équations différentielles, mais on parle aussi de la compréhension en géométrie, en algèbre, on parle de la pensée géométrique, arithmétique, algébrique.

Il semble que ces termes sont encore trop vagues, lorsqu'on essaie de savoir ce que les élèves ne comprennent pas, et ce que, au fond, nous voulons leur faire comprendre.

L'«algèbre» occupant une grande partie du curriculum scolaire, on s'occupe beaucoup, en didactique des mathématiques, des difficultés qu'ont les élèves dans ce domaine. Mais les didacticiens sont loin d'avoir obtenu un consensus sur ce qu'est l'algèbre par opposition, par exemple, à l'arithmétique, ou sur ce qui distingue un mode de résolution algébrique d'un mode de résolution arithmétique, etc. Ce que nous voulons que les élèves comprennent quand ils étudient l'algèbre à l'école n'est donc pas très clair: équations? variables? l'approche algébrique à la résolution de problèmes? Ou bien: qu'ils comprennent l'activité même de résolution de problèmes en se servant de l'algèbre comme d'un outil intellectuel, un langage et un calcul symbolique? (Chevallard, 1989-1990)

Exemple: les objets de compréhension en algèbre

Les petits problèmes à texte que les élèves ont à résoudre habituellement à l'école n'exigent pas vraiment que l'on aille jusqu'à utiliser l'outil algébrique. Chaque problème peut être résolu par des moyens qui lui sont propres. L'algèbre n'a pas été conçue pour résoudre des problèmes particuliers.

Ce qui justifie l'introduction de l'algèbre, ce sont des questions méthodologiques qui font appel à des outils, des méthodes, un langage permettant d'approcher de larges classes de problèmes, et des questions métamathématiques cherchant à unifier, généraliser et vérifier la validité des méthodes mathématiques.

Nous ne pouvons pas compter que les élèves du collège, avec le peu d'expérience qu'ils ont, vont abstraire et généraliser leurs méthodes particulières de résolution de problèmes jusqu'à en faire une méthodologie. Personne ne peut inventer une méthodologie de recherche sans avoir été soi-même un chercheur praticien. La méthode algébrique ne peut être qu'imposée aux élèves et alors, il y a un risque, bien connu d'ailleurs, que ce nouvel outil bloque la pensée spontanée des élèves et remette au fin fond de la mémoire les stratégies utilisées jusqu'alors, parfois bien efficaces.

Ce qui est, pour l'enseignant, une méthode algébrique de résolution de problèmes, risque de devenir, pour l'élève, une mécanique, une activité scolaire dans laquelle on s'engage pour le plaisir de l'enseignant mais qui n'a rien à voir avec la méthodologie et surtout rien à voir avec la recherche des réponses à des questions intéressantes. L'objet de compréhension, conçu par l'enseignant dans son cours, va changer d'identité en devenant l'objet de compréhension de l'élève.

Des réflexions analogues ont été exprimées récemment par M. Jean-Luc Dorier (1991), à propos de l'échec d'une expérience d'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau post-secondaire. Guidé par le postulat bien connu de Régine Douady (1986), qu'un savoir doit d'abord être outil avant d'être un objet, l'auteur a élaboré un projet d'introduction du concept de linéarité, fondamental dans l'algèbre linéaire, à travers une étude de la convergence des suites de Fibonacci. Cette étude peut se faire avec l'outil numérique ou analytique; on découvre alors une suite géométrique convergeant vers 0. Une approche algébrique permet de modéliser la situation par un espace vectoriel à deux dimensions et de démontrer que toutes les autres suites convergentes vont être des multiples de celle-ci.

Dorier constate:

«Cette expérience ... nous a conduit a un constat d'échec, au moins partiel, que nous imputons essentiellement à la difficulté qu'il y a, dans cette situation, à gérer le changement de cadre en interaction avec la connaissance visée. Schématiquement on peut dire que les deux cadres dans lesquels le problème peut se formuler sont d'une part le cadre analytique d'expérimentation locale et d'autre part le cadre algébrique d'exploration plus globale. Le premier est celui où se placent "naturellement" les étudiants, ils essaient quelques valeurs, se forgent des hypothèses, puis en fonction de conditions sur les deux premiers termes de la suite démontrent, au moins partiellement, des résultats de convergence en utilisant des outils ad hoc issus de leur connaissances d'analyse. Le deuxième cadre est celui d'une exploration algébrique du problème: étudier la structure de l'ensemble, plutôt que la nature de ses éléments directement. Ce cadre n'est pas à la disposition des étudiants débutants en algèbre linéaire, qui n'ont (sauf

exception) pas de connaissances de structures algébriques. Or, plus qu'une idée de linéarité ou de changement de base qui ne sont peut-être que des "petits" problèmes techniques ... la connaissance vraiment en jeu dans ce problème semble bien être la prise de conscience de la nécessité du *changement de point de vue du local au global* (c'est moi qui souligne). Il faut savoir passer d'une étude du coup par coup, en fonction des valeurs des [premiers termes de la suite de Fibonacci], à une vision globale du problème. En outre, la question centrale du problème était l'étude de la convergence des suites de Fibonacci. Or dans cette problématique, la découverte de la suite géométrique convergente vers zéro est le fait crucial, l'utilisation de l'algèbre linéaire ne sert ensuite qu'à confirmer qu'il n'y a que des multiples de cette suite qui convergent. La difficulté didactique est donc de savoir comment motiver la recherche des suites géométriques autrement que par une consigne artificielle... Plus généralement, ces interrogations soulèvent le problème de savoir si tous les concepts - particulièrement en algèbre linéaire - peuvent avoir, pour les étudiants, un aspect outil avant d'être des objets de savoir. Dans la séquence précédente, par exemple, dégage-t-on vraiment la notion de famille génératrice ou de base, alors qu'une fois les deux suites géométriques exhibées, tout se résume à une banale résolution de système 2x2? Il semblerait bien plutôt que ces notions sans être fondamentales pour ce problème, permettent, si on les connaît, donc à posteriori, de mieux *justifier* (c'est moi qui souligne) certaines étapes dans la résolution et de classer ce type de problèmes dans une classe plus vaste, ce qui permet de mettre en place automatiquement des processus d'investigation.

Dans le cas de la plupart des connaissances d'algèbre linéaire, la difficulté pour appliquer le modèle de la dialectique outil-objet vient en particulier de ce que *ces connaissances ne sont jamais vraiment indispensables pour résoudre un problème* (c'est moi qui souligne). Nous avons eu confirmation de ce fait essentiel grâce à une étude historique, et l'analyse de l'enseignement existant qui nous a montré *combien l'aspect unificateur et généralisateur était difficile à faire passer aux étudiants* (c'est moi qui souligne).» (Dorier, 1991)

Le principe de la dialectique outil-objet n'est peut-être pas tout à fait à abandonner dans l'enseignement de l'algèbre, mais il faut bien identifier cet outil et cet objet: l'algèbre est outil de généralisation et d'unification des connaissances mathématiques: donc il faudrait d'abord les avoir, ces connaissances, avant de pouvoir employer cet outil. Et l'objet de savoir est une méthodologie des mathématiques: un langage, des concepts généraux, unificateurs, des constructions et des méthodes à application universelle. Reste à déterminer pour qui et comment un tel outil et un tel objet peuvent devenir des objets de compréhension.

Le problème des objets de compréhension est lié autant au sens mathématique des contenus d'enseignement qu'aux objectifs de cet enseignement. Ce n'est pas la même chose, si l'on se propose de faire apprendre aux élèves une technique de résolution d'équations ou si notre but est de leur faire connaître diverses approches à la résolution de problèmes; si l'on veut que le problème soit résolu ou si l'on veut qu'il soit résolu «par l'algèbre».

Une prudence particulière s'impose lorsqu'on parle des objets de compréhension dans le cadre d'un apprentissage institutionnalisé. De l'enseignant à l'élève, l'objet de compréhension change facilement d'identité. Ce qui est, par exemple, pour l'enseignant, une méthode algébrique de résolution de problèmes, risque de devenir, pour l'élève, une mécanique, une activité scolaire dans laquelle on s'engage pour le plaisir de l'enseignant mais qui n'a rien à voir avec la méthodologie et surtout rien à voir avec la recherche de réponses à des questions intéressantes. L'activité de l'élève n'a pas toujours un caractère cognitif; très souvent son activité est stratégique, visant à satisfaire les contraintes de l'institution scolaire en n'investissant que le strict nécessaire de l'effort cognitif.

III - LA BASE DE L'ACTE DE COMPRÉHENSION

Nous appelerons «base de compréhension» cet objet Y sur lequel notre pensée se dirige dans notre intention de comprendre un objet X.

Qu'est-ce qui peut être base de compréhension?

Représentations

Si dans l'acte de comprendre un événement, par exemple, nous l'identifions comme un accident, cela signifie que nous avons repéré des signes qui, dans notre expérience sont caractéristiques d'un accident et nous nous sommes construit une représentation mentale de cet événement dans laquelle ces caractéristiques sont au premier plan. Les Gestaltistes parleraient dans ce cas d'une certaine organisation du champ de conscience.

D'autre part, si c'est l'expression «accident» qui est l'objet de notre entendement, notre pensée peut se diriger soit sur une image - une représentation visuelle - d'un accident que nous avons vécu ou vu, soit sur une description ou définition verbale telle que, par exemple: «événement imprévu malheureux ou dommageable» (Le Petit Larousse).

Logicien et philosophe, Ajdukiewicz (1965) ne distingue que ces deux sortes de représentations par: quelque chose qu'on pourrait traduire par «images et sensations» (*wyobrazenia*, dans l'original) et «concepts».

Il semble cependant qu'en réalité ces formes pures de représentations sont assez rares. On a plus souvent affaire à des représentations mixtes où une part est jouée par l'image et une autre - par une description verbale.

Si l'on pense, par exemple, à l'expression «un carré» on voit bien une forme carrée mais en même temps l'on pense à quelque chose comme: des «côtés égaux perpendiculaires».

Certains termes mathématiques comme, par exemple, «indépendance linéaire», désignant des propriétés bien abstraites, se prêtent difficilement à une représentation visuelle. Cela ne veut pas dire, cependant, que leur compréhension ne puisse se faire qu'à l'aide d'une représentation conceptuelle. On rencontre chez les débutants une représentation qu'en didactique des mathématiques, on a pris l'habitude d'appeler «procédurale» (cf. Herscovics & Bergeron, 1989). On se représente ce qu'on doit ou peut faire avec l'objet de compréhension. Parfois on n'est capable que de «faire», sans beaucoup de conscience de ce que l'on fait et pourquoi on le fait. Parfois, on est déjà capable de réfléchir sur ses actions et de les décrire. Tel est le cas de cet étudiant de première année d'université qui définissait un ensemble linéairement indépendant de polynômes en disant:

Robert: *«For the polynomials to be linearly independent they must be expressed as a linear combination then the components are equated. Results are put into a matrix, the matrix is reduced to echelon form. If after being reduced the matrix has all non-zero rows then the polynomials are said to be linearly independent over K.»*

Ou le cas de cet élève déjà légendaire de 12 ans qui croyait avoir compris la formule de l'aire d'un rectangle «parce qu'il avait eu toutes les réponses justes». Il avait probablement un schéma pour calculer les aires d'un rectangle: «on prend les deux nombres et on les multiplie».(Skemp, 1978)

Cette dernière catégorie de représentations est proche de ce que Bruner appelait «représentations inactives», en tant que représentations qui s'expriment par l'intermédiaire de gestes et d'actions (1973). On rejoindrait ainsi une catégorisation brunnerienne des représentations en inactives, décrites ci-dessus, iconiques - qui s'expriment par l'intermédiaire des images, et symboliques qui utilisent le médium du signe et du langage.

Certains actes de compréhension consistent non pas en la construction ou le rappel d'une représentation mais bien en une traduction d'un système de représentations en un autre - tel le cas de Robert qui, en écrivant sa définition a dû faire appel à une traduction de la représentation inactive de l'indépendance linéaire en une représentation symbolique: une description verbale de ses actions.

J.S. Bruner disait:

«... much of [spontaneous] learning consists of a kind of translation of one representational system into another, as when we become capable not only of following a given path habitually, but of representing it by an image in our mind's eye.» (Bruner, 1973, p. 316)

De tels actes de traduction d'un système de représentation en un autre sont particulièrement fréquents en mathématiques dont les objets, toujours abstraits, ne peuvent être communiqués autrement que par l'intermédiaire de quelque médium.

Compréhension à base d'une «pensée que ...»

Lorsqu'on comprend le phénomène du retardement du tonnerre par rapport à l'éclair pendant un orage, sur la base de la pensée que la raison de celui-ci est dans la moins rapide propagation des ondes acoustiques par rapport aux ondes de la lumière, ce que l'on construit n'est plus une représentation de l'objet de compréhension mais une pensée qui peut ou non être notre conviction. Dans notre exemple, cette pensée est, en fait, une explication.

En mathématiques, la compréhension des hypothèses ou de théorèmes doit être basée justement sur de telles «pensées que ...» (il va sans dire que ces pensées font référence à toutes sortes de représentations). Ces «pensées que ...» peuvent exprimer nos suppositions quant aux raisons de validité de telle ou telle assertion, ou quant à la signification de tel ou tel théorème prouvé. Par exemple, on peut comprendre le théorème «$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel» en partant de la pensée que ce théorème a été démontré et la preuve, apparemment, ne souffre pas d'erreurs. Ou bien, on peut le comprendre en pensant qu'il exprime le fait géométrique de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté. On encore - en pensant que c'est un fait dont la découverte a provoqué une crise importante dans les mathématiques grecques et a donné naissance à un grand effort

théorique qui a porté fruit sous forme de la théorie des proportions d'Eudoxe, antécédent de la théorie de la continuité des nombres réels de Dedekind.

Manière de comprendre

Quant on fait abstraction, en analysant un acte de compréhension d'un objet X, du temps où il a eu lieu, du sujet comprenant et de son intention de comprendre, et de certaines caractéristiques idiosyncratiques de la base de compréhension, ce qu'on obtient est «une manière de comprendre» l'objet X.

Ajdukiewicz définit ainsi le sens d'une expression comme une manière de la comprendre.

Comprendre l'expression «un carré» en se représentant une image d'une forme carrée, et la comprendre en se disant que c'est un rectangle aux côtés égaux, sont deux manières différentes de comprendre la même chose.

Luria (1981, p. 56) décrit différentes manières de comprendre les mêmes mots chez l'enfant et l'adulte. Un enfant, à qui on a demandé «Qu'est-ce qu'un chien?» va répondre: «Le chien garde la maison» ou: «Le chien aboie». L'adulte va dire: «Le chien est un animal domestique». Un enfant et un adulte vont appeler les mêmes choses par le même nom, mais ils vont utiliser différents critères pour décider si un nom s'applique à un objet ou pas. Luria dirait que pour l'enfant et l'adulte les objets ont la même référence mais ont un autre sens «catégorique» (ils catégorisent les choses d'une manière différente).

On peut se poser la question quel sens référentiel et/ou catégorique attribuent les élèves du collège au terme «équation», «variable», «inconnue», «solution d'une équation» et même «algèbre». Qu'est-ce qu'ils croient apprendre lorsqu'ils apprennent «l'algèbre»? On peut supposer que, dans ce cas, même le sens référentiel pourrait être différent pour l'élève et l'enseignant (dans l'exemple donné au début de ce papier une élève classait «x(x - 1)» comme une équation).

La base de compréhension d'un mot peut se caractériser non seulement par une représentation des objets auxquels on peut l'appliquer et par des critères qu'on utiliserait dans ce but, mais aussi par des associations: des mots et des phrases qu'on utiliserait avec le mot donné dans différentes situations. Un mot n'est compris que lorsque nous lui avons trouvé un «champ sémantique» (Luria, ibidem, p. 35) où il a sa place: c'est en outre, ce champ sémantique qui lui donne son sens et sa signification. Les manières de comprendre un mot peuvent donc différer par l'étendue et l'organisation des champs sémantiques dans lesquels les actes de compréhension sont capables de l'inclure.

Un champ sémantique peut être organisé sur la base des liens logiques et des inclusions dans des catégories par des opérations de généralisation et synthèse; mais il peut être organisé sur la base d'associations concrètes, d'une appartenance au même domaine d'expérience ou par le fait d'être utilisé dans les mêmes situations. Dans le premier cas Vygotski parlerait de la pensée conceptuelle; dans le deuxième - de la pensée «situationnelle» ou «en complexes» (Vygotski, 1962, ch. VI). L'élève qui a mis l'inscription «x(x-1)» dans le même groupe que «y= 2x - 1» n'était pas guidé, dans son choix, par une catégorisation des notations en, par exemple, «équations» et «expressions algébriques qui ne sont pas des équations» mais par une «ressemblance familière»: la première notation apparaît souvent dans le même contexte que la deuxième; toutes les deux contiennent la lettre «x», etc.

En définissant la relation de «comprendre une expression dans le même sens» Ajdukiewicz (1965) focalise son attention sur les aspects suivants de la base de compréhension:

Il dit que deux personnes «comprennent une expression dans le même sens», si:

1) *elles appliquent cette expression aux mêmes objets;*

2) elles utilisent la même méthode pour décider si l'expression s'applique à un objet donné ou non;

3) elles ont la même attitude envers l'expression, c'est-à-dire elles l'interprètent toutes les deux comme étant affirmative, ou interrogative, ou impérative;

4) elles attribuent le même aspect affectif à l'expression (neutre, positif, péjoratif ou négatif).

Dans les points de vue de Luria et Ajdukiewicz les deux premiers aspects sont communs. Mais Ajdukiewicz ne s'intéresse ni au «champ sémantique» des associations ni, *a fortiori*, à son organisation (conceptuelle ou situationnelle - en complexes). Et Luria n'attribue pas assez d'importance aux deux derniers aspects qui, cependant, semblent assez importants dans la compréhension, même en mathématiques.

Par exemple, pour beaucoup de jeunes élèves le signe «=» est interprété comme un ordre d'exécuter un calcul et non pas comme signe d'identité reliant les choses entre lesquelles il se trouve. Par conséquent, une relation définie par le signe «égal» peut ne pas être immédiatement perçue comme symétrique. Ainsi, les opérations qu'on est censé faire sur les équations pour les résoudre, et pour lesquelles on assume qu'elles n'affectent en rien l'équilibre de l'égalité, peuvent ne pas avoir de sens pour quelqu'un qui conçoit le signe «=» comme un ordre. Par contre les inscriptions décrivant une division d'entiers avec reste: «23 : 7 = 3 r 2 » ont un sens bien précis: «quand on divise 23 par 7 on obtient 3 et il nous reste 2».

L'aspect affectif n'est pas à ignorer non plus, en mathématiques: l'aversion, par exemple, de beaucoup d'élèves (et d'adultes) pour les fractions est bien connue.

IV - LES CONDITIONS DE LA COMPRÉHENSION

Il s'agira ici de conditions internes, mentales et psychiques.

Nous parlerons surtout des conditions nécessaires qui semblent assez bien identifiées.

Attention

Pour comprendre quelque chose, il faut bien le remarquer, l'identifier comme objet de compréhension. Locke disait:

> «Men … come to be furnished with fewer or more simple ideas from without, according as the objects they converse with afford greater or less variety; and from the operations of their minds within, according as they *more or less reflect on them*. For, though he that contemplates the

operations of his mind, cannot but have plain and clear ideas of them; yet, *unless he turns his thoughts that way*, and considers them *attentively*, he will no more have clear and distinct ideas of all the operations of his mind, and all that may be observed therein, than he will have all the particular ideas of any landscape, or of the parts and motions of a clock, who will not turn his eyes to it, and with attention heed all the parts of it. The picture, or the clock may be so placed, that they may come in his way every day; but yet he will have but a confused idea of all the parts they are made up of, till he applies himself with attention, to consider them each in particular.»

(Essay, BK I Ch i)

En didactique des mathématiques, c'est Mason qui a identifié l'attention comme condition nécessaire de compréhension (1982, 1989).

Intention

L'attention sous-entend l'intention: sans l'intention de comprendre il ne peut y avoir de compréhension. Cela ne veut pas dire que nous sommes toujours conscients de nos actes de compréhension; mais il y a tension intellectuelle là où il y a compréhension (voir les histoires des découvertes mathématiques de Poincaré et autres chez Hadamard, 1945).

D'autre part, il peut y avoir l'intention de comprendre, l'effort et la tension intellectuelle, sans qu'apparaisse, dans notre esprit, cet objet, si attendu, Y, qui jouerait le rôle de la base de compréhension. On pourrait parler, en ce cas, d'un acte de compréhension «vide». Bien sûr, un tel acte ne dure pas longtemps, on arrive toujours à substituer quelque objet, d'une manière exploratoire, en attendant une meilleure solution. Voici un exemple de mon expérience personnelle: on me donne, par téléphone une adresse en anglais: *«sixty nine hundred Boulevard Décarie»*. Moi, qui parle et comprend anglais, mais compte toujours dans ma langue maternelle, j'entends ce *«sixty nine hundred»*, je suis capable de répéter ces mots, ma pensée en cherche désespérément le sens, mais à l'endroit «Y» il y a le vide. Un bon moment s'écoule avant que dans mon esprit n'apparaissent les chiffres «6900». Ce phénomène pourrait s'expliquer par le fait que la manière de lire des milles comme des centaines est complètement étrangère à la langue polonaise.

Nous dirions qu'il y a eu acte de compréhension «vide» plutôt que de dire qu'il n'y a pas eu de compréhension, tant le rôle de l'intention nous semble important. Nous tenterions même de dire que l'identification de l'objet de compréhension et l'intention de comprendre sont des conditions suffisantes d'un acte de compréhension. Bien sûr, en parlant des niveaux de compréhension de quelque chose, un acte compréhension «vide» se trouverait au plus bas des niveaux.

Question

Il y a sans doute des actes de compréhension qui ne sont pas précédés d'une question, posée consciemment. Parfois nous assimilons l'information, tout simplement. Mais il semble qu'une question précède tout acte de compréhension qui introduit un changement quelque peu important dans ce que nous savons ou croyons.

Dewey (1988) parlait de la complémentarité des fonctions de la compréhension «non-questionnée» et de celle précédée par une question. Il appelle la première *«ap-préhension»*, la deuxième - *«com-prehension»*. Il dit:

«It is a necessary condition of any judgment, of any reflective inference that some understanding, some meaning be missing. We think in order to grasp the full meaning of an event. However, something must already be understood, the mind must already be in possession of some meaning that it has mastered, because otherwise thinking is impossible… An increased experience brings new problems to our awareness; on the other hand, we understand or solve these problems only thanks to translation of new difficulties onto what is already known and clear to us. This is the incessant spiral movement of knowledge. Our progress towards true knowledge always consist partly in discovering something yet incomprehensible in what we previously took for granted, and partly in a direct application of unquestioned meanings as tools to grasp unclear, doubtful and uncertain meanings. There is no subject so well-known and obvious or so banal that would not in a new situation suddenly bring about some problem and thereby trigger reflection in order to understand it.»

(Dewey, ibidem, p. 155)

Dans la théorie piagetienne de l'équilibration, les deux mécanismes d'assimilation et d'accommodation semblent être analogues à ceux qui sont impliqués dans les actes d'«ap-prehension» et de «com-prehension», respectivement. Le mécanisme d'accommodation est déclenché par un conflit mental - un événement causé par la contradiction entre l'information venant de l'environnement et les structures mentales existantes. Et un conflit est un pas vers une question, il prépare une question.

Dans la compréhension scientifique, le rôle des questions est estimé fondamental. Bachelard (1983) va jusqu'à dire que:

«Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.»

(Bachelard, 1983, p. 14)

V - LES CATÉGORIES D'OPÉRATIONS MENTALES QUI PEUVENT ÊTRE IMPLIQUÉES DANS UN ACTE DE COMPRÉHENSION

Il semble que la compréhension repose sur quatre opérations mentales, celles notamment d'identification, de discernement, de généralisation, et de synthèse.

Identification

Un objet de compréhension doit être isolé comme objet et identifié comme objet de compréhension. Après être identifié comme objet de compréhension, il peut être identifié comme quelque chose, un élément d'une catégorie, par exemple.

En essayant de comprendre une inscription symbolique en mathématiques, on a normalement besoin de beaucoup de flexibilité pour bien identifier les significations des variables. Par exemple, le symbolisme algébrique a tous les avantages d'une écriture concise, mais aussi tous les inconvénients, dû à la polysémie des signes utilisées. Dans une seule notation, un même symbole peut être utilisé dans deux sens différents. Par exemple, dans l'égalité

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A)$$

où f, g sont des polynômes d'une variable sur un corps K, et A est une matrice carrée sur K, le signe «+» à gauche signifie l'addition dans l'espace des polynômes, le même signe à droite signifie l'addition dans l'algèbre des matrices.

En lisant un texte mathématique, que ce soit un théorème, sa preuve ou un problème «à texte», il faut identifier les informations mathématiquement pertinentes. Dans la formulation d'un théorème, par exemple, les hypothèses sont énumérées l'une après l'autre, rien ne nous dit, si elles sont essentielles et en quel sens elles sont essentielles. Beaucoup d'étudiants se rappellent, par exemple, que les suites monotones et bornées (du bon côté) sont convergentes. Il y en a moins qui auraient identifié l'hypothèse que la suite est supposée dans R et non pas, par exemple, dans Q, et que cela fait toute la différence entre ces deux domaines.

Discernement

Pour Locke, notre compréhension se fonde sur deux opérations mentales: «agreement» et «disagreement» ou sur le discernement entre les idées (Essay, BK II, ch. xi).

Un niveau de discernement est une simple perception que deux objets ne forment pas un seul objet. Un autre niveau de discernement est celui où deux objets sont comparés entre eux par rapport à certaines caractéristiques sensibles, contingentes aux objets eux-mêmes. Un niveau encore plus élevé est celui où deux objets sont comparés ebntre eux par rapport à des relations plus abstraites; par exemple - des catégories auxquelles ces objets appartiennent, etc.

Aux niveaux élevés, le discernement exige normalement une certaine généralisation des objets comparés. Aux niveaux moins élevés le discernement se réduit souvent à ce que Luria appelle une «différentiation»:

> «...when preschoolers or young schoolchildren are asked what a dog and a cat or a bicycle and a motorcycle have in common, they usually point out how they differ rather than what they have in common. Psychologists have long known that differentiation develops earlier than generalization , but this fact remained unexplained. The proper explanation is that differentiation is characterized by concretely based thinking ("The dog has sharp teeth, the cat has sharp claws", ...). The process of identifying common features, however, is not based on concrete thinking. Rather, it involves including an object in an abstract category (the dog and cat are animals, the bicycle and motorcycle are means of transport, etc.). The predominance of differentiation during early ontogenetic stages is a manifestation of the fact that the processing involved relies on concrete description.»
>
> (Luria, 1981, p. 60)

Généralisation

Nous concevons ici la généralisation comme une opération de l'esprit qui mène à la perception d'une situation donnée comme cas particulier d'une autre situation.

À première vue, les opérations d'identification et de discernement semblent plus fondamentales que l'opération de généralisation qui, dirions-nous, appartient aux fonctions déjà plus sophistiquées de la pensée théorisante. Il n'en est rien.

Bruner dit: «Toute perception est un acte de catégorisation», et toute catégorisation sous-entend une généralisation.

Vygotski écrit: «Les recherches montrent qu'à tous les niveaux de développement [du sujet connaissant] le concept est un acte de généralisation».
(Vygotski, 1962; dans l'édition polonaise 1988: p. 169)

> «Les recherches sur la formation des concepts montrent qu'un concept n'est pas un simple empilement d'associations, appropriées par mémorisation, pas plus qu'il n'est une habitude intellectuelle automatique, mais bien un acte de pensée, complexe et véritable, qu'il est impossible de s'approprier par mémorisation, car il s'agit de ce que la pensée de l'enfant, dans son développement interne, s'élève, par elle-même, à un niveau plus avancé, où la conscience s'enrichit d'un concept. Les recherches montrent que, à tous les niveaux de développement, le concept est *un acte de généralisation*. Le couronnement de toutes les recherches dans ce domaine est la thèse que les concepts, entendus psychologiquement comme les sens des mots, se développent. L'essence même de ce développement repose, avant tout, en le passage d'une structure de généralisation à une autre.
>
> [Il est vrai] qu'à tout âge [de l'enfant] le concept est une généralisation. Mais les sens des mots subissent une évolution. L'appropriation, par l'enfant, d'un mot nouveau, lié à un certain sens, ne marque pas la fin du développement de ce mot, mais bien son véritable commencement. Au début, le mot est une généralisation du type le plus élémentaire, mais, avec le développement de l'enfant, cette généralisation élémentaire se transforme en types de plus en plus élevés, jusqu'à ce qu'elle devienne un vrai concept.
>
> Le processus de développement des concepts, ou sens des mots, fait appel à de nombreuses fonctions: attention volontaire, mémoire logique, abstraction, comparaison, discernement. Il n'est pas possible d'apprendre ces processus psychiques très compliqués en les mémorisant, il n'est pas possible de s'en instruire pour se les approprier. Alors, d'un point de vue théorique, il est complètement faux de croire qu'à l'école, l'enfant s'instruit des concepts sous une forme toute faite et se les approprie comme toute autre habitude intellectuelle. L'apprentissage des concepts par mémorisation est impossible ... Ce qui est appris est une forme vide des mots ... [L'enfant] reste perplexe devant tout essai d'utilisation consciente de ses connaissances.»
>
> (Vygotski, pp. 196-170)

L'apprentissage des mathématiques exige de l'enfant un très grand effort de généralisation: à commencer par ses premières expériences avec les nombres des choses, passant par les nombres tout court, allant vers les inconnues, les variables, les relations entre les variables, les relations entre les relations, etc.

Toute variable est un terme général, désignant un terme quelconque d'un domaine donné. Toute l'algèbre n'est autre chose que l'étude de la généralité de nos assertions et de nos techniques, en même temps qu'elle est un effort de généralisation et de synthèse.

Mais même en résolvant un simple problème d'application de théorie, l'activité de compréhension de l'étudiant va impliquer une généralisation du problème, afin qu'il puisse identifier la méthode de solution, et en y spécifiant les variables, résoudre le problème.

La généralisation, fondamentale dans le développement individuel des concepts, n'est pas moins fondamentale dans le développement historique des mathématiques. Poincaré disait que «la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes».

Daval et Guilbaud (1945) le montrent très bien, en faisant une méticuleuse reconstruction de l'histoire du théorème dit de Bolzano à partir de l'identification par Cauchy de la condition suffisante du fonctionnement de la méthode de résolution des équations par les approximations successives, jusqu'à la formulation, en topologie, du théorème disant que les fonctions continues conservent les espaces connexes. C'est en fait les efforts de précision et de clarification de la notion de fonction continue qui sont vus par Daval et Guilbaud comme étant à la source des généralisations qui ont mené au développement de la topologie.

Dans le passage cité plus haut, Vygotski nous rappelle que la généralité ne peut nous être imposée. C'est une opération mentale que personne ne peut faire pour nous.

D'autre part, cette opération doit se faire sur un objet: on généralise quelque chose, un concept, un problème, une situation mathématique. Il faut donc avoir identifié ce quelque chose comme objet.

En menant nos élèves ou étudiants vers une généralisation (comme celle dont abonde l'algèbre) nous oublions bien souvent que cet objet de généralisation peut ne pas en être un pour eux. Savent-ils seulement qu'ils sont supposés généraliser? Il serait peut-être utile de réfléchir sur le fait que cet objet leur est accessible ou non.

Cette réflexion au sujet, par exemple, de l'enseignement de thèmes d'algèbre linéaire tels celui de la forme canonique de Jordan mène à la conclusion que leur apprentissage ne peut se faire sans que la problématique de la résolution d'équations, d'applications linéaires, leur indépendance du choix de la base etc. ne devienne un objet et non, tout au plus un ensemble de techniques de résolution de petits problèmes de calcul ou de vérification.

Synthèse

«Synthèse», pour nous ici, veut dire: recherche d'un lien commun, d'un principe unifiant, d'une similitude entre plusieurs éléments identifiés, et leur saisissement comme un tout sur cette base.

Par exemple, après avoir suivi une démonstration mathématique pas à pas, ou, en cherchant une preuve, soudain, nous saisissons ce qu'on appelle *nervus probandi* ou l'idée de la démonstration: la preuve devient un tout - nous la tenons comme un objet dans notre esprit.

Le saisissement de la preuve est l'exemple d'une synthèse «locale» en mathématiques. On peut parler de synthèses plus globales, qui saisissent comme un tout de vastes domaines du savoir mathématique. Ce sont de telles synthèses qui ont permis l'unification que les mathématiques ont connu au cours du XXe siècle. Cette unification était basée sur de grandes idées organisatrices comme celles de fonction, de transformation,

relation d'équivalence, structure algébrique, structure quotient, catégorie, etc. L'algèbre dite abstraite, l'algèbre linéaire, la théorie des catégories,... sont, on pourrait dire, des sous-produits de ces efforts de synthèse.

Pour Bachelard, ce qui est le moteur de tout développement scientifique, ce sont des questions et des hypothèses qui essaient d'y répondre. Et, d'après lui (1975), «toute hypothèse est synthèse». Il dit que la pensée scientifique moderne se caractérise par un type spécifique d'hypothèses. Ces hypothèses ne sont pas basées sur des généralisations inductives à partir des observations de la nature ou à partir du savoir acquis; c'était l'expression d'une attitude positiviste envers la réalité, l'observation, l'expérience et le savoir des prédécesseurs. Ce qui est le plus frappant dans la pensée scientifique moderne, dit Bachelard, c'est son «caractère polémique». La question favorite semble être: «et pourquoi pas?», ce qui mène à des «généralisations polémiques» plutôt qu'à des généralisations tout court: les géométries non-euclidiennes et les algèbres non-commutatives constituent de tels exemples paradigmatiques. Bachelard souligne tout de même, que de telles généralisations seraient bien futiles si la pensée s'y arrêtait. Mais il ne s'y arrête pas. Ces généralisations ne sont, en fait, que des symptômes de franchissement de certaines croyances, convictions ou points de vue. C'est ce dépassement qui apporte un savoir vraiment nouveau sous forme de grandes synthèses, telle, par exemple, l'idée de Klein de concevoir les géométries comme des théories des invariants de diverses classes de transformations.

Dans des travaux récents, j'ai montré comment les quatre opérations mentales décrites ci-dessus fonctionnent dans les processus de compréhension des notions de limite d'une suite numérique et de fonction en mathématiques (Sierpinska, 1990, 1992). Ici, je ne donne que quelques exemples dans le contexte de la compréhension de l'algèbre au niveau collégial.

Quelques exemples d'actes de compréhension en algèbre

Günther Malle (1990) a attiré notre attention sur les actes suivants nécessaires dans la compréhension de la résolution de problèmes à texte avec l'outil algébrique:

DISCERNEMENT entre une pensée «concrète-illustrative» (liée à un contexte, orientée par des objets et relations concrètes, «épisodique» - suivant le cours de l'histoire à laquelle le problème fait référence) et la pensée «logique-formelle» (catégorisante et orientée par les relations entre des classes ou des quantités, non épisodique).

DISCERNEMENT entre l'emploi de lettres à des fins sténographiques et leur emploi en tant que variables numériques.

SYNTHÈSE de la notion d'expression algébrique comme désignant, en même temps, un processus et un résultat de ce processus (par exemple, «x + 4» peut être vu comme un processus d'addition de 4 au nombre x en même temps qu'un nombre qui est le résultat de ce calcul).

SYNTHÈSE de la notion d'égalité algébrique comme désignant, en même temps, une action et une relation ou condition (par ex. «S = 6 P» peut vouloir dire: il faut multiplier P par 6 pour obtenir S, ou: S est six fois autant que P).

On identifie aussi d'autres actes de compréhension qui semblent nécessaires pour la compréhension de l'algèbre scolaire. Par exemple:

DISCERNEMENT entre les informations mathématiquement pertinentes et des informations mathématiquement non pertinentes dans la compréhension d'un problème à texte (Malle, ibidem).

IDENTIFICATION de la proportionnalité comme jouant un rôle important dans les raisonnements, pas seulement mathématiques (Sierpinska, 1992).

SYNTHÈSE des notions de raison et de proportion avec les notions générales de nombre et d'égalité entre les nombres (Sierpinska, ibidem).

DISCERNEMENT entre les équations algébriques et les schémas, utilisés en arithmétique, pour calculer une quantité inconnue (Chevallard, 1989-1990).

DISCERNEMENT entre le rôle du calcul en arithmétique et en algèbre: en arithmétique, ce rôle est secondaire; ce n'est qu'une activité technique dont le but principal est de calculer l'inconnue. En algèbre, le calcul est au cœur même du raisonnement (Chevallard, ibidem).

DISCERNEMENT entre la signification des opérations en arithmétique et en algèbre: par exemple, en arithmétique, les facteurs d'un produit n'ont pas le même rôle symétrique qu'ils ont, en algèbre.

VI - QU'EST-CE QU'UNE «BONNE» COMPRÉHENSION?

La manière dont nous avons défini un acte de compréhension ne fait pas la distinction, a priori, parmi une «bonne» et une «moins bonne» compréhension. Cependant, dans la perspective de l'enseignement et de l'apprentissage, cette distinction est cruciale. Parfois, les problèmes de l'évaluation de la compréhension deviennent si importants pour le chercheur que le point de vue axiologique l'emporte sur les questions plus fondamentales sur la nature même de l'entendement.

Certains chercheurs, qu'on pourrait appeler «behavioristes», vont donc se lancer dans des projets (parfois internationaux, comme le ICMI Study on Assessment) d'évaluation de ce que les élèves d'âges différents savent et comprennent en mathématiques.

D'autres, prenant le point de vue pragmatique, après avoir identifié une difficulté d'apprentissage, vont chercher des moyens d'y remédier par une bonne organisation des contenus, des situations didactiques, des interventions de l'enseignant.

D'autres encore, centrés sur les processus cognitifs en tant que tels, vont construire des «modèles» de compréhension qui sont autant de théories de compréhension que des visions d'une compréhension idéale.

Bien sûr, en réalité, personne n'est seulement «behavioriste», ou «pragmatiste», ou «cognitiviste». Dans un projet de recherche à long terme, le behavioriste et le pragmatiste doivent se mêler au cognitiviste.

Dina et Pierre Van Hiele (1958), en élaborant leur modèle d'apprentissage de géométrie avaient bien un objet pragmatique et pratique en vue: l'amélioration de la

compréhension de la géométrie chez les élèves. Leur modèle n'en est pas moins théorique et explicatif des mécanismes de compréhension. L'idée principale en était que dans le processus d'apprentissage on peut distinguer des niveaux tels celui-ci: ce qui joue le rôle de base procedurale de compréhension à un niveau n, devient objet de compréhension à un niveau n+1 (cf. Freudenthal, 1973, p. 125). Ceci n'est pas loin de l'idée de dialectique outil-objet de Douady (1986), bien qu'il y manque cet aspect «dialectique», d'opposition et de renforcement entre les niveaux.

Les recherches décrites dans le volume bien connu «Children's understanding of mathematics: 11-16» (Hart, 1981), font tout d'abord l'impression d'une approche behavioriste: les résultats sont basés sur une statistique des erreurs des élèves dans divers types de problèmes. Mais il faut se rendre compte que l'élaboration même des problèmes posés aux enfants a exigé des recherches cliniques, une étude non seulement dychotomique des erreurs (il y a erreur ou il n'y en a pas), mais plus approfondie de leur sources, dans les représentations que les enfants peuvent avoir de diverses notions mathématiques. Cet effort d'approche plus cognitive est visible dans le volume. Par exemple, Küchemann (1981) identifie six niveaux d'interprétation et d'utilisation de lettres en algèbre par les élèves de 11 à 16 ans: - la lettre non utilisée et ignorée, - la lettre à laquelle on associe une valeur numérique dès le début, - la lettre utilisée comme une abréviation du nom de l'objet et désignant l'objet lui-même, et non pas sa quantité (comme, par exemple, le nom d'un point en géométrie; ou: E pour «étudiants» et P pour «professeurs» et non pas pour les nombres des étudiants ou des professeurs, entre lesquels, on se le rappelle bien, il existe la fameuse relation 6E=P); - la lettre comme inconnue; - la lettre comme nombre généralisé; - la lettre comme variable.

Dans l'approche «cognitiviste» on peut distinguer, au moins, deux sortes de recherches. L'une a un caractère plus théorique et produit des modèles plus ou moins généraux de compréhension. L'autre se centre sur l'«acquisition» de concepts et de processus mathématiques particuliers, sur l'identification des erreurs et des difficultés. Nous ne nous occuperons ici que des recherches plus théoriques.

Modèles de compréhension

Plusieurs modèles différents de compréhension ont été proposés en didactique des mathématiques. On pourrait en distinguer quatre sortes.

Les uns sont centrés sur un ordre - on pourrait dire - discret des niveaux de compréhension. Chez d'autres, s'il y a des niveaux, leur ordre est plutôt continu, on ne cherche pas à les distinguer les uns des autres en les nommant, par exemple, et l'on se penche surtout sur un système, une structure conceptuelle qui évolue. Les premiers vont identifier, décrire et donner des étiquettes à une hiérarchie de niveaux de compréhension; ils vont aussi parler des seuils («mentaux», «conceptuels», «épistémologiques») qui marquent le passage d'un niveau à l'autre. Pour les autres, le niveau de compréhension sera défini par le degré de structuration du système conceptuel, par sa ressemblance à une structure mathématique.

La troisième approche voit l'acquisition d'un concept comme le résultat d'un jeu dialectique entre deux manières de concevoir l'objet de compréhension, telle la «dialectique outil-objet» de Régine Douady, ou la complémentarité entre notion mathématique comme processus et cette même notion comme objet de Sfard (1991).

La quatrième approche focalise son attention sur l'acte de compréhension et distingue ceux qui marquent des seuils épistémologiques importants. Nous en parlerons plus en détail au chapitre suivant.

Les modèles «structuralistes» sont très généraux et assez peu satisfaisants quand il s'agit de comprendre en quoi consiste telle ou telle erreur particulière des élèves. On peut, bien sûr, dire, que l'élève n'a pas encore développé la structure conceptuelle appropriée. Ce n'est pas assez pour un didacticien qui doit corriger l'erreur et aider l'élève à la comprendre. On cherche donc à décrire ce que serait une structure «modèle» de compréhension de telle ou telle notion mathématique et alors on se sent mieux placé pour juger des causes d'une erreur spécifique: on sait mieux ce qui peut manquer dans la structure que s'est construite l'élève (cf. Behr & al., 1983).

Un reproche que l'on pourrait faire à l'approche «structuraliste» est que les chercheurs prennent parfois leurs modélisations des structures mentales des élèves pour ces structures elles-mêmes. Et alors on voit des hypothèses un peu trop optimistes quand au degré de sophistication des conceptualisations des élèves ou enfants. Par exemple Lesh & al. (1983) disent que:

> «To most mathematicians, mathematics is the study of structure, the content of mathematics consists of structures, and to do mathematics is to create and manipulate structures. It is our hypothesis that these structures (whether they are embedded in pictures, manipulative materials, spoken language, or written symbols), and the processes used in manipulating and creating these structures, comprise the "conceptual models" that mathematicians and mathematics students use to solve problems... For example, the relationships that a child uses to think about and compare ratios are similar to the relations that define a "complete ordered field" in which the elements are equivalence classes of ordered pairs of whole numbers. On the other hand, when a rational number is interpreted as a position on a number line, many of the relationships that children notice and use are simplified and restricted versions of the structural properties that define metric topology of the rational-number line - such properties as betweenness, density, distance, and (non) completeness.»
>
> (Lesh & al. ibidem, p. 169)

Les auteurs vont jusqu'à dire qu'un «youngster» pense les rationnels comme une extension des nombres entiers.

La «théorie récursive de la compréhension en mathématiques» de Pirie & Kieren (1989) appartient aux modèles «à ordre discret de niveaux». Les auteurs conçoivent la compréhension comme un processus évolutif de la connaissance *(«a growing process of coming to know»)*. Ce processus est stratifié en niveaux, ressemblant quelque peu aux niveaux de Van Hiele. Dans les deux modèles, les bases procédurales de compréhension à un niveau deviennent objets de compréhension à un niveau supérieur. En plus, le domaine et la qualité des objets de compréhension à un niveau sont délimités, en quelque sorte, par les manières de comprendre au niveau inférieur.

Les niveaux, depuis les moins sophistiqués jusqu'aux plus sophistiqués sont étiquetés de la manière suivante: *«doing»*, *«image making»*, *«image having»*, *«property noticing»*, *«formalizing»*, *«observing»*, *«structuring»*, *«inventing»*. Dans le modèle de Van Hiele, *«doing»*, *«image making»* et *«image having»* seraient tous inclus dans le niveau 0 de «visualisation». *«Property noticing»* serait le niveau 1 d'«analyse», *«Formalizing»* et

«observing» sont contenus dans le niveau 2 de «déduction informelle». *«Structuring»* est proche de la «déduction» (niveau 3 de Van Hiele). *«Inventing»* n'a pas besoin d'avoir beaucoup de point commun avec la «rigueur» (niveau 4 de Van Hiele) et c'est là que l'analogie entre les théories de Van Hiele et de Pirie-Kieren semble se rompre. Mais, *«inventing»* n'est pas possible sans «intégration» (la phase de l'enseignement dans le modèle de Van Hiele qui est censée promouvoir la rigueur) ce qui suppose la généralisation et la synthèse des connaissances déjà construites. D'ailleurs, et c'est justement cela que suggère l'exemple donné par Pirie et Kieren: c'est l'exemple de l'invention, par Bolyai, Gauss et Lobachevsky des géométries non-Euclidiennes.

Alors que les modèles «structuralistes» ont tendance à être un peu trop généraux, la dissection en niveaux de Pirie & Kieren est, par contre, un peu trop détaillée. Cependant, la description de chaque niveau n'est pas sans ambiguïté. Les auteurs ont utilisé l'exemple de la compréhension des fonctions quadratiques pour, en même temps, décrire et vérifier leur modèle. On comprend bien comment le modèle fonctionne dans ce cas-là. Mais il peut être difficile de décrire quelle manière de comprendre appartient à quel niveau dans le cas d'autres notions ou processus mathématiques.

Lorsqu'en 1978, Richard R. Skemp (1978) déclenchait la discussion sur la compréhension en mathématiques dans certains milieux de didacticiens, son modèle était très simple: il y deux sortes de compréhension: la compréhension relationnelle et la compréhension instrumentale. D'ailleurs, sans crier gare, Skemp étendait sa dichotomie sur non seulement la compréhension, mais aussi sur l'explication, l'enseignement, l'apprentissage, les mathématiques.

La division des manières de comprendre en relationnelles et instrumentales ne correspond pas à la division des représentations mentales en «procédurales» et «conceptuelles», par exemple. Une compréhension «instrumentale» peut être basée sur une représentation conceptuelle (p. ex. on écrit que 20 centimètres fois 15 pieds font 300 centimètres carrés, «parce que l'aire est toujours en centimètres carrés» (Skemp, ibidem). Ce qui fait la différence entre ces deux manières de comprendre, ce sont les motifs qui guident l'acceptation de quelque chose comme base de notre entendement. Si ces raisons sont fondées sur des significations «catégoriques» accordés aux mots et sur des liens analytiques et logiques entre ces significations, alors notre manière de comprendre est relationnelle. Si, par contre, nos raisons sont pragmatiques et/ou fondées sur des liens factuels, des relations contextuelles entre objets, alors nous comprenons d'une manière instrumentale. Il y aussi (et peut-être avant tout), une différence de but, de connaissance visée: l'intention d'un acte de compréhension relationnelle est cognitive; celle de compréhension instrumentale est pragmatique.

Il semble que dans la «dialectique outil-objet» de Douady (1986), c'est cette même distinction entre le «pragmatique» et le «cognitif» qui réapparaît: d'abord on comprend pour en faire quelque chose, pour obtenir quelque chose; ensuite (parfois) on comprend pour comprendre.

Herscovics & Bergeron (1989) identifient trois «niveaux» de compréhension: intuition, compréhension procédurale, abstraction logico-mathématique (sous réserve que ces niveaux ne peuvent être définis généralement, mais demandent une nouvelle définition dans le cas de chaque concept mathématique). Dans l'article cité, les auteurs définissent les niveaux de compréhension de la notion de nombre chez de jeunes enfants. Tandis que le premier et le troisième niveau semblent être deux catégories des actes de compréhension de la notion de nombre, le niveau intermédiaire - le niveau de transition - semble plutôt être composé des connaissances acquises à travers des expériences avec les nombres (l'enfant

connaît les noms des nombres, sait «compter jusqu'à ... », a opéré avec des nombres et a obtenu un feed-back de la part des adultes, etc.).

On pourrait dire, si on voulait avoir une division homogène d'actes de compréhension de ce dernier modèle, que l'«intuition» est fondée sur des actes de compréhension basés sur des représentations sensorielles et sensori-conceptuelles, la «compréhension procédurale» - sur des représentations procédurales et procédurales-conceptuelles, l'«abstraction logico-mathématique» - sur des «pensées que ...».

Mais le message le plus important, il semble, qu'ont à nous transmettre Bergeron et Herscovics est qu'il n'est pas très utile de formuler des modèles généraux de compréhension en mathématiques. Un modèle général ne va pas nous expliquer les erreurs concrètes des élèves, ne va pas nous dire pourquoi notre enseignement de telle ou telle chose ne marche pas, il ne va pas nous inspirer dans l'amélioration de notre enseignement. Nous devons d'abord comprendre nous-mêmes la notion mathématique que nous enseignons; nous devons en saisir la signification à travers une «analyse épistémologique» approfondie.

VII - LA COMPRÉHENSION ET LES OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES

Il existe, en didactique des mathématiques, une approche qui cherche à identifier quels sont les actes dans les processus de compréhension d'une notion mathématique donnée qui marquent de vrais «seuils épistémologiques» qui ont, pour le saisissement du sens de cette notion, une signification de première importance.

Alors que dans l'identification des «niveaux» de compréhension, on s'intéresse surtout aux «manières de comprendre» et aux connaissances qui en résultent, l'approche «épistémologique» met au centre de son intérêt l'acte de compréhension. Ce ne sont plus des «niveaux» de compréhension qu'on parle mais de la signification, pour les connaissances qui se développent, de certains actes de compréhension.

Il y a des actes de compréhension «routiniers» qui ne font que reconnaître l'objet de compréhension comme objet connu: l'objet de compréhension est rangé parmi d'autres objets connus. Une information n'est «assimilée» que par les structures mentales existantes.

Mais il existe aussi des actes non-routiniers où soit un objet est identifié comme objet de compréhension nouveau, soit on découvre soudain qu'un objet connu peut être compris d'une manière tout à fait nouvelle.

Là encore, une assimilation peut suffire: le nouvel objet est ajouté au répertoire d'objets connus sans qu'aucun réarrangement soit nécessaire; le nouvel aspect semble ne contredire en rien ce qu'on savait jusqu'alors.

Mais il arrive que les choses ne soient pas aussi simples. Prenons, par exemple, une situation familière, celle d'un jeune enfant au jardin zoologique auquel on montre, pour la première fois de sa vie, une girafe. L'enfant peut simplement ajouter le mot «girafe» et l'image de l'animal a ses répertoires de mots et de représentations d'animaux. Mais il se peut aussi que l'enfant montre des signes de frayeur en s'exclamant: «Mais ça, c'est un dragon! Il n'y a que des dragons qui ont des cous si longs!». Dans ce dernier cas, l'enfant, parfois non sans effort et émotions, devra réviser ses représentations aussi bien d'animal que de dragon.

Un autre exemple: quand on introduit la notion de puissance zéro en décrétant que $a^0 = 1$, certains élèves vont tout simplement l'ajouter à leur mémoire de conventions diverses ou règles mathématiques sans trop y penser. D'autres vont l'accepter comme une convention commode qui permet de conserver la continuité de la fonction exponentielle $y = a^x$. Mais d'autres encore vont se révolter en disant que l'inscription a^0 n'a pas de sens: la puissance est une multiplication répétée (a^n veut dire qu'il faut multiplier a par soi-même n-1 fois). Que veut dire multiplier a par soi-même 0-1 fois? Dans ce cas, nous dirions que la représentation de la puissance comme multiplication répétée fonctionne comme obstacle pour la compréhension de la fonction exponentielle.

Dans un sens, une compréhension qui se base sur une question, une identification de ce que l'on ne comprend pas, est supérieure à une compréhension «sans problème» mais banale et souvent verbale de «$a^0 = 1$» comme convention et règle à suivre. Elle va plus au fond du sens de cette convention, elle en cherche les raisons. Mais elle exige une réorganisation, une «accommodation des structures cognitives»: elle demande une généralisation de la notion de puissance, elle demande qu'on se construise une représentation de la notion de puissance réelle.

Voici pourquoi on distingue, comme particulièrement importants, parmi les actes non-routiniers ceux qui consistent en l'identification et le franchissement d'un obstacle.

Parmi les obstacles - ces manières de comprendre les choses - il y en a qui sont plus importants que d'autres: la prise de conscience de leur champ de validité s'ajoute directement aux critères qui déterminent le sens et la signification de l'objet de compréhension.

Si cet objet est un objet de connaissance scientifique, on qualifie un tel obstacle d'«épistémologique» (cf. Bachelard, 1983; Brousseau, 1980-1981; Sierpinska, 1988).

Une étude qui cherche à identifier ce qui, dans les actes de compréhension, doit être surmonté comme obstacle épistémologique relatif à une notion mathématique contribue à l'analyse épistémologique de cette notion, marque les moments cruciaux, les «seuils» de développements aussi bien historiques qu'individuels de la notion.

Des essais de telles études ont été présentés dans nos travaux antérieurs (Sierpinska, 1985, 1987, 1990, 1992 et Sierpinska & Viwegier, 1992).

RÉSUMÉ

1) Un acte de compréhension est un acte d'introduction d'ordre, de systématisation:

- acte qui consiste à trouver un principe unifiant, une relation qui fonde ce que nous voulons comprendre;
- acte qui range l'objet de notre compréhension (i.e. ce qui est à comprendre, ou ce qui est en train d'être compris) dans l'ordre de nos idées ou de nos expériences. On peut, par exemple, identifier l'objet de compréhension comme un cas particulier d'une catégorie plus générale; ou identifier cet objet comme une généralisation d'un autre;
- acte qui consiste à relier mentalement l'objet de compréhension à un autre objet.

- acte d'équilibration d'une structure cognitive: ce qui demande d'être équilibré, du point de vue de la psychologie de Piaget, ce n'est plus «le champ de conscience», comme chez les Gestaltistes, mais des schèmes ou des structures cognitives que le sujet construit à partir de ses actions et interactions avec l'environnement. Ces schèmes et structures qui sont à la base de l'entendement humain n'ont point le caractère d'images (idées) des objets matériels que l'on perçoit par les sens, ni de représentations de nos opérations mentales (comme abstraction, composition, discernement) mais elles sont des modèles mentaux de nos véritables actions sur l'environnement.

- acte de saisir le sens, d'identifier un objet dans une situation où il joue un rôle pertinent: ainsi l'action de comprendre transforme un objet isolé en élément d'une situation, d'un tout qui, par cela même, lui confère un sens, lui procure un fondement.

2) Un acte de compréhension implique: le sujet comprenant *S*, l'objet X que *S* est en train de comprendre, l'objet Y à la base duquel *S* comprend X, l'intention *i* de comprendre, i.e. l'acte de volonté qui dirige la pensée de *S* de X vers Y; le moment t où l'acte a lieu: [*S*, X, Y, *i*: X --->Y, t].

Donc: un acte de compréhension est un acte intentionnel de la raison par lequel l'objet de compréhension est mis en relation avec un autre objet d'une manière qui laisse au sujet comprenant le sentiment de rétablissement d'ordre, d'unité ou d'équilibre de ses idées. Dans tout acte de compréhension, sont impliqués: le sujet comprenant et son intention de comprendre, son objet de compréhension, sa base de compréhension (une représentation, une pensée), le moment où l'acte a lieu.

3) Nos actes de compréhension peuvent se baser sur des représentations diverses (procédurales, visuelles, ou conceptuelles, ou en termes brunneriens: inactives, iconiques ou symboliques), sur des traductions d'un système de représentation à un autre ou sur des «pensées que...». En mathématiques, la compréhension des hypothèses ou de théorèmes doit être basée justement sur de telles «pensées que ...» (il va sans dire que ces pensées font référence à toutes sortes de représentations). Ces «pensées que...» peuvent exprimer nos suppositions quant aux raisons de validité de telle ou telle assertion, ou les raisons de signification de tel ou tel théorème prouvé.

4) Manière de comprendre: quand on fait abstraction, en analysant un acte de compréhension un objet X, du temps où il a eu lieu, du sujet comprenant et de son intention de comprendre, et de certaines caractéristiques idiosyncratiques de la base de compréhension, ce qu'on obtient est «une manière de comprendre» l'objet X. Les manières de comprendre, par exemple, une expression, peuvent différer sous plusieurs aspects: sa référence, son sens «catégorique» (ou connotation), son «champ sémantique», l'organisation de ce champ sémantique (à la base de liens logiques et d'inclusions dans des catégories par des opérations de généralisation et de synthèse, ou à la base d'associations concrètes, d'une appartenance au même domaine d'expérience ou au fait d'être utilisé dans les mêmes situations), l'interprétation de l'expression comme étant affirmative, ou interrogative, ou impérative, l'interprétation de l'expression comme étant neutre, positive ou négative du point de vue affectif.

5) Attention et intention sont des conditions nécessaires de compréhension. L'intention en est aussi une condition suffisante. Une question précède tout acte de

compréhension qui introduit un changement quelque peu important dans ce que nous savons ou croyons.

6) Quatre opérations mentales sont impliquées dans la compréhension: l'identification, le discernement, la généralisation, et la synthèse.

7) En didactique des mathématiques on essaie souvent d'évaluer la compréhension; on parle de «niveaux de compréhension», de bonne et moins bonne compréhension.

On pourrait distinguer au moins quatre approches: «structurelle», «par niveaux», «dialectique» et «épistémologique». L'approche «par niveaux» est centrée sur un ordre discret des niveaux de compréhension, comme celui de Van Hiele dont l'idée principale est que dans le processus d'apprentissage, on peut distinguer des niveaux tels celui-ci: ce qui joue le rôle de base procédurale de compréhension à un niveau, devient objet de compréhension à un niveau supérieur. Dans l'approche «structurelle», l'ordre des niveaux est plutôt continu, on ne cherche pas à les distinguer les uns des autres et l'on se penche surtout sur un système, une structure conceptuelle qui évolue. Ici, le niveau de compréhension est défini par le degré de structuration du système conceptuel, sa ressemblance avec une structure mathématique. Les promoteurs de l'approche «dialectique» voient l'acquisition d'un concept comme le résultat d'un jeu dialectique entre deux manières de comprendre, deux manières d'approcher l'objet de compréhension, telle la «dialectique outil-objet» de Régine Douady, ou l'opposition entre les aspects processus et objet d'une notion mathématique de Sfard. Alors que dans ces trois approches, on s'intéresse surtout aux «manières de comprendre» et aux connaissances qui en résultent, l'approche «épistémologique» met au centre de son intérêt l'acte de compréhension. Ce ne sont plus des «niveaux» de compréhension qu'on parle mais de la signification, pour les connaissances qui se développent, de certains actes de compréhension. On distingue, comme jouant le plus grand rôle dans le processus de compréhension d'une notion mathématique, les actes qui consistent à franchir un obstacle épistémologique.

Bibliographie

Ajdukiewicz, K. (1965). *Logika pragmatyczna*. Warszawa: PWN.

Bachelard, G. (1975). *Le nouvel esprit scientifique*. Paris: PUF.

Bachelard, G. (1983). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: PUF.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., Silver, E.A. (1983). Rational-number concepts. *In :* R. Lesh & M. Landau (Eds): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Brousseau, G. (1980-1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques,1(1-2)*.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,4* (2).

Bruner, J.S. (1973). On perceptual readiness. *In:* J.M. Anglin (Ed.): *Beyond the information given*. New York: W.W. Norton & Company Inc.

Chevallard, Y. (1989-1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x, N° 23*, pp. 5-38.

Daval, R. & Guilbaud, G.-T. (1945). *Le raisonnement mathématique*. Paris: PUF.

Dewey, J. (1988). *Jak myslimy?* (How we think). Warszawa: PWN.

Dorier, J.-L. (1991). Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 11*(2.3), pp. 325-364.

Douady, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathematiques 7*(2) , pp. 5-31.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dortrecht, Holland: D. Reidel Publishing Co.
Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publ. Inc.
Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.
Herscovics, N. & Bergeron, J.-C. (1989). A model to describe the construction of mathematical concepts from an epistemological perspective. *Proc. of the 13th Meeting of the CMESG*, St. Catharine's. Ontario: May 26-31.
Hirsch, E.D. jr (1967). *Validity in interpretation*. New Haven: Yale University Press.
Küchemann, D.E. (1981). Algebra. *In*: K. Hart (Ed.):*Children's understanding of mathematics*: 11-16. London: John Murray.
Leibniz, W.G. (1765). *New Essays on Human Understanding*.
Lesh, R., Landau, M. Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. *In*: R. Lesh & M. Landau (Eds): *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.
Locke, J. (1690). *An Essay Concerning Human Understanding*.
Luria, A.R. (1981). *Language and cognition*. New York: John Wiley & Sons.
Malle, G. (1990). Semantic problems in elementary algebra. *Proceedings of the BISME-2, Bratislava*, August 23-25, pp. 37-57.
Mason, J., Davis, J. (1990). On noticing in the mathematics classroom. *Proceedings of*
Mason, J. (1982). Attention. *For the Learning of Mathematics* 2(3), 21-23.
Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as a result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics* 9 (2), pp. 2-8.
Piaget, J. (1975). *Równowazenie struktur poznawczych* (Equilibration des structures cognitives). Warszawa: PWN.
Piaget, J. (1985). *Strukturalizm* (Le structuralisme). Warszawa: Ksiazka i Wiedza.
Pirie, S., Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics* 9 (3), 7-11.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22* (1), 1-36.
Sierpinska, A. & Viwegier, M. (1992). O powstawaniu przeszkód epistemologicznych zwiazanych z pojeciem nieskonczonosci u dzieci 10-12 i 14-letnich. *Dydaktyka Matematyki 13*, 253-311 (On constitution of conceptions of infinity into epistemological obstacles in 10-12 and 14 years old children) - in Polish.
Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6 (1), 5-68.
Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits.
Sierpinska, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. *In*: N. Bednarz & C. Garnier (Eds): *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. Montréal: Agence d'Arc, pp. 130-147.
Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning in Mathematics 10* (3), 24-36.
Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function, to appear in E. Dubinsky & G. Harel (Eds): *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*.
Skemp, R.K. (1978). Relational and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher 26* (3), 9-15.
Tomaszewski, T. (1986). *Glówne idee wspólczesnej psychologii*. Warszawa: Wiedza Powszechna.
Van Hiele, D. & P. (1958). *Report on methods of initiation into geometry*. In H. Freudenthal (Ed.), Gröningen: J.B. Wolters.
Vygotski, L.S. (1989). *Myslenie i mowa*. Warszawa: PWN (cf. also: Vygotski, L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, Mass.: MIT Press).

SYNTHÈSE DES DISCUSSIONS AYANT EU LIEU PENDANT LE COLLOQUE

Nadine Bednarz , CIRADE
Louis Charbonneau, département de mathématiques
Université du Québec à Montréal

Trois aspects seront repris dans cette synthèse, dans l'ordre où ils ont été discutés: (1) un essai de caractérisation du raisonnement algébrique, ce qu'on en retient; (2) une analyse des changements conceptuels nécessaires dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, et (3) des considérations didactiques relatives aux situations susceptibles de favoriser ce passage au raisonnement algébrique.

1. Caractérisation du raisonnement algébrique

Ces caractéristiques touchent, sous le volet particulier de la résolution de problèmes, au type d'engagement dans le problème et à son traitement. Elles nous renvoient par ailleurs à la réflexion que ce raisonnement exige, en regard notamment des concepts de nombre, d'opérations, et d'égalité. De manière plus globale, le raisonnement algébrique touche aussi à d'autres caractéristiques sur lesquelles nous reviendrons également dans ce qui suit.

— Type d'engagement dans le problème

Dans la résolution algébrique d'un problème, une représentation globale des données (connues et inconnues) et relations entre ces données doit être investie dès le départ. Ceci ne veut pas dire qu'une telle représentation se construise de manière instantanée (la mise en place de cette représentation globale des relations entre les données fait en effet appel à un certain processus heuristique). Cela ne veut pas dire non plus que cette représentation corresponde nécessairement à une équation symbolique (d'autres modélisations que l'équation sont ici possibles: recours à un schéma, à un graphique, au langage en mots...).

Dans cet engagement global dans le problème, toutes les relations doivent toutefois être traitées sur un même pied d'égalité, par opposition au raisonnement arithmétique qui, du fait de son travail sur des données connues et de son caractère séquentiel dans le traitement de ces données, va devoir prioriser certaines relations par rapport à d'autres.

Cette représentation globale des relations entre les données va s'exprimer de plus à partir d'états, et l'état initial y jouera entre autres un rôle important (cf. texte de N. Bednarz, B. Janvier, C. Mary, A. Lepage). En fixant l'inconnue, et en acceptant d'opérer sur celle-ci pour établir les états intermédiaires qui lui permettent de tracer un portrait d'ensemble des relations entre les données, le raisonnement algébrique s'appuie en effet sur des états. Il rejoint en cela un type de raisonnement arithmétique (opérant par essais-numériques, essais-ajustement). Il s'oppose cependant en cela à un autre type de raisonnement arithmétique, plus rare, qui s'articule sur les relations (ou transformations) connues, indépendamment des états auxquels celles-ci donnent naissance (cf. texte Bednarz, Janvier, Mary, Lepage).

— **Distance nécessaire dans le traitement par rapport aux grandeurs et au contexte**

Dans le traitement du problème, les calculs algébriques vont devoir évoluer de façon autonome. Il y a dans ce traitement une distance nécessaire vis-à-vis du contexte et des grandeurs en présence: certaines manipulations sont en effet impossibles à interpréter en regard de celles-ci (on ne parle plus dans cette manipulation d'un nombre de quelque chose mais d'un nombre abstrait). Dans la procédure arithmétique, la séquence d'opérations effectuée par l'élève est au contraire très liée aux grandeurs en présence et au contexte.

— **Existence de certaines règles générales de manipulation qui guident la résolution**

Le processus de résolution d'un problème met en jeu une certaine dialectique entre la représentation du problème et la résolution. Il ne s'agit nullement d'un processus linéaire: mise en équation suivie d'une résolution (cf. texte de Luis Radford). Ainsi l'engagement dans le problème et la mise en équation sont guidées par l'outil de résolution (exemple des identités...), et le choix de l'inconnue va être lui aussi fonction de la forme d'équation à laquelle on veut arriver.

— **Désémantisation du langage**

Il doit y avoir, on l'a dit précédemment, éloignement du contexte sémantique au profit d'une syntaxe formelle dans le traitement du problème. Cependant, à la fin de cette résolution, une réinterprétation du modèle initial qui a permis cette résolution est nécessaire. On doit resémantiser à la fin du processus (ce que les élèves ne font pas en général). Ceci implique qu'il y ait une décision, une conscience de désémantisation. On assiste ici à un changement de mode de contrôle tout au long du processus de résolution du problème: avant la mise en équation, le sens assure ce contrôle, une fois l'équation écrite, le contrôle dépend de la maîtrise des règles de manipulation.

— **Type de réflexion sur les nombres et les opérations**

Dans le raisonnement algébrique, la signification concrète des nombres est évacuée lorsque le sujet opère (il ne s'agit plus d'un nombre de quelque chose mais d'un nombre abstrait...).

L'évolution de la pensée algébrique est de plus indissociable d'une évolution dans la conceptualisation même du nombre: extension des nombres naturels aux rationnels, aux entiers et éventuellement aux complexes (cf. texte de L. Charbonneau/J. Lefebvre).

Les conceptions de l'égalité et de l'opération mises en jeu sont aussi différentes (nous reviendrons là-dessus plus loin).

— **Caractère analytique du raisonnement algébrique**

En arithmétique, on s'engage dans la résolution sans être nécessairement convaincu qu'on va déterminer l'inconnue à la fin. On commence avec une quantité connue, puis on se déplace par une séquence d'opérations successives manipulant des valeurs connues vers l'inconnue, qui

constitue alors le point final du trajet emprunté. La résolution algébrique doit justement commencer par cette fin que l'arithmétique ne contrôle pas ou n'arrive pas à anticiper. En posant une équation, nous supposons en quelque sorte le problème résolu. Nous retrouvons là le caractère analytique du raisonnement algébrique: «L'émergence de l'algèbre se manifeste dans le passage d'une pensée de style synthétique à une pensée de stype analytique (au sens des anciens). Dans la synthèse, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée. Dans l'analyse, on suppose que la chose cherchée est obtenue, pour de là considérer ce qui dérive de cette chose et dont elle est précédée, jusqu'à ce que revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes» (L. Charbonneau, J. Lefebvre).

Ce raisonnement passe alors par l'acceptation de considérer cette inconnue, en faisant comme si elle était connue, et par l'acceptation d'opérer sur ce quelque chose d'inconnu.

— recherche d'un procédé général

Le raisonnement algébrique se caractérise aussi, au-delà d'un problème particulier, par la recherche d'un procédé général valable pour une classe de problèmes (cf. référence à l'histoire, en particulier à Viète dont l'objectif rejoignait explicitement cette intention...).

Cette recherche de procédé général peut prendre deux formes: elle va être associée à l'expression de solutions générales par rapport à une même classe de problèmes (l'accent est alors mis sur l'énoncé d'une solution générale) ou elle va trouver sa place dans la recherche de conditions à l'intérieur desquelles la solution fonctionne. Ce dernier aspect a joué un rôle important dans le développement de l'algèbre (cf. texte de L. Charbonneau/J. Lefebvre).

— Outil de réflexion sur les connaissances antérieures

L'algèbre permet de réfléchir globalement sur ce que l'on a fait. Elle permet de se représenter ses propres actions dans un domaine précis (résolution d'un problème, compréhension d'une loi numérique, d'une situation géométrique...) et de réfléchir dessus. En ce sens, et au-delà de la résolution de problèmes, elle permet de revenir sur les connaissances acquises antérieurement et de voir celles-ci sous un jour nouveau. Elle permet ainsi de revenir sur notre connaissance des domaines numérique et géométrique, et de les enrichir. Trouvant sa source éventuelle dans ses domaines, elle contribue à les dépasser et les enrichir.

La caractéristique qui suit, mise en évidence lors du colloque, n'a pas le même statut que les précédentes. Elle a trait aux liens entre l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie.

— Historiquement, l'algèbre tient à la fois de l'arithmétique et de la géométrie en les dépassant toutes les deux.

Avant Viète et Descartes, l'on ne saurait parler d'une algèbre. Il faudrait plutôt parler de plusieurs algèbres, chacune avec ses corps de règles et de procédés visant à résoudre un certain nombre de problèmes. De Diophante, le numéricien-arithméticien, à al-Khwarizmi, qui emploie la géométrie pour des fins de démonstration des procédés de résolution, aux Pacioli, Chuquet, Cardan et Bombelli des XV^{e} et XVI^{e} siècles, deux pôles, l'un arithmétique, l'autre géométrique, chacun avec ses avantages et ses limites, nourrissent une dialectique à laquelle puisent ces différentes algèbres. L'algèbre de Viète vient mettre un terme à cette bipolarisation. Il crée une algèbre autosuffisante reposant sur un certain nombre de règles qui ont un caractère pour ainsi dire axiomatique et qui sont indépendantes de l'arithmétique et de la géométrie, même

si, au terme du processus algébrique de résolution d'un problème arithmétique ou géométrique, une réécriture du processus dans un cadre arithmétique ou géométrique doit pouvoir être fait. Dès lors, l'algèbre peut avoir une vie propre.

2. Changements conceptuels nécessaires dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre

On réfère ici à des changements conceptuels majeurs dans le passage du raisonnement arithmétique au raisonnement algébrique, et dont on doit tenir compte dans l'élaboration d'un enseignement en algèbre.

— Acceptation de considérer et d'opérer sur l'inconnue

Le raisonnement algébrique va prendre appui sur les quantités inconnues en acceptant d'opérer sur celles-ci et en les traitant comme si elles étaient des grandeurs connues. C'est là une rupture importante avec le raisonnement arithmétique.

Certains membres ont alors mentionné que cela passait pour l'élève par la conscience et la confiance d'aboutir ainsi à une réponse. Ceci est un aspect important dans l'acceptation de la démarche algébrique.

— Conception des opérations et de l'égalité

- Cette acceptation de l'inconnue et des opérations sur celle-ci se traduit aussi par *l'acceptation de garder des opérations non-achevées* (cf. Collis, «Acceptance of lack of closure»). Ceci constitue un changement conceptuel important dans la mesure où, en arithmétique, opérer se traduit pour l'élève par la nécessité de réduire ce qui est fourni à une seule expression. Lorsqu'il y a opération, il y a indication de faire quelque chose avec les données en présence et d'aboutir à un résultat.

- Dans les expressions algébriques (telles par exemple a+b=b+1), on retrouve du "+" d'un nouveau type. En arithmétique, les opérations sont "actives", elles décrivent une action à effectuer. On génère alors des résultats successifs. En algèbre, les opérations sont "plus statiques" Ainsi l'expression b+1 désigne à la fois l'action d'ajouter 1 à b, la *trace* de cette opération, et le résultat de cette opération.

- Conséquence de ce qui précède, l'égalité acquière là aussi un statut différent:

L'opération en arithmétique étant liée à une action à effectuer, le "=" va, dans ces conditions, être souvent associé à un résultat, prenant alors le sens pour l'élève de "ça donne". En algèbre, l'égalité devra être davantage associée à une *équivalence*, cherchant à conserver un équilibre entre deux expressions.

De plus, il faut ici faire une distinction importante entre égalité et équation (ce que ne fait pas l'élève), cette dernière mettant en fait en jeu une *égalité conditionnelle*.

- Enfin, les opérations en algèbre exigent, on l'a vu précédemment, un détachement des grandeurs et du contexte. Ainsi, on sent comme une *contradiction à toujours vouloir donner du sens aux opérations en arithmétique, ce sens devant être évacué* par la suite en algèbre lorsqu'on veut interpréter les manipulations effectuées (il apparaît alors difficile de donner une signification aux opérations effectuées en regard des grandeurs et du contexte...).

— **Conception du nombre**

Dans le raisonnement algébrique, on l'a vu précédemment, la signification «concrète» des nombres est évacuée lorsque le sujet opère: il ne s'agit plus d'un nombre de quelque chose mais d'un nombre général, arbitraire...

Le nombre est ici une construction de l'esprit, dont la signification ne se trouve pas dans l'expérience sensible (ex. des nombres irrationnels, relatifs, complexes...). Pour fonctionner algébriquement, il faut commencer à voir ce concept de nombre comme une entité abstraite, et quand on accepte ce fait, on commence à voir l'algèbre comme quelque chose d'indépendant qui a ses propres règles.

Cette évolution dans la conception même du nombre va se manifester parallèlement à l'évolution de la pensée algébrique: l'apprentissage de l'algèbre et l'évolution du concept de nombre sont indissociables.

— **Engagement dans le problème: toutes les relations sont sur le même pied d'égalité**

Le mode de saisie algébrique des données dans un problème prend en compte globalement les relations entre les données, sans les hiérarchiser. En arithmétique, l'engagement dans le problème, au moment de sa résolution, va au contraire «prioriser» certaines relations par rapport à d'autres. Il s'agit là d'un changement conceptuel important.

— **Lecture du problème**

La façon de prendre l'information, de lire le problème peut en conséquence apparaître différente en arithmétique et en algèbre. À partir du texte du problème, il faut construire des représentations externes successives qui vont aboutir à la construction d'une équation. Cette démarche, dans laquelle on traîne l'inconnue, est impossible, à moins qu'on ne lise le problème différemment de la façon dont on le fait en arithmétique (cf. texte de Luis Radford).

— **Changement de statut de la lettre:**

Dans le raisonnement arithmétique, la lettre, lorsque celle-ci est utilisée, ne joue qu'un rôle désignatoire: elle sert à fixer les différentes grandeurs en présence, connues et inconnues, à mettre de l'ordre dans les données pour mieux saisir l'énoncé du problème et les relations en présence, à désigner celles-ci... (cf. texte de S. Schmidt). En algèbre, la lettre acquière un tout autre statut. Celle-ci a ici un statut opératoire: l'acceptation d'opérer sur l'inconnue se traduit par une opération sur les lettres même... (cf. texte de Radford, rôle référentiel versus rôle opératoire).

Remarque:

Quelques éléments de réponse doivent de plus être ajoutés dans cette section, en référence à la question «Est-ce que le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans la résolution de problèmes est une transition douce ou une rupture?», en référence au texte plus spécifique de N. Bednarz, B. Janvier, C. Mary, A. Lepage.

Deux types de solutionneurs arithmétiques doivent ici être considérés. Les hypothèses qui peuvent être formulées dans un cas comme dans l'autre sont différentes, et restent à cette étape sujettes à vérification. Le «saut» pourrait être plus ou moins grand selon le profil préalable. Le raisonnement de type essais numériques, s'articulant sur des états, à partir d'un état initial qu'il fixe, semble à première vue, plus près du raisonnement algébrique qui lui aussi s'appuie sur des états. Cependant, même si dans ce cas, le raisonnement algébrique semble présenter certaines filiations avec le raisonnement arithmétique, le passage de l'un à l'autre nécessite des changements conceptuels importants: il passe par l'acceptation de considérer l'inconnue et d'opérer sur celle-ci, comme si elle était connue, et par un changement de statut de l'opération...

Le raisonnement arithmétique, plus rare, s'articulant sur les relations et transformations connues, indépendamment des états, semble à première vue plus loin du raisonnement algébrique, qui lui s'articule sur les relations définies à partir d'états. Il peut cependant être un préalable à un autre type de raisonnement important en algèbre, privilégiant la notion de variation... Le raisonnement arithmétique sur les relations cache un genre d'algèbre qui n'a pas d'outils symboliques.

3. Relativement aux situations d'émergence susceptibles de favoriser le passage à un raisonnement algébrique.

— **Un travail possible en arithmétique en termes d'inconnue, et d'opérations cherchant à «garder trace de...»** (préparant mieux les changements conceptuels nécessaires dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre).

Il n'est pas nécessaire d'attendre l'algèbre pour que les élèves travaillent avec une inconnue (un travail est ici possible en termes de faire semblant que..., par exemple: je pense dans ma tête à un nombre qui ..., quel est ce nombre?

En arithmétique, on peut aussi amener les enfants à garder trace d'une séquence d'opérations, et on travaille alors l'opération dans une optique différente. Il est possible ici de penser également au calcul rapide et aux procédures associées, où le rôle accordé à l'opération n'est plus celui qui consiste à donner un résultat immédiat mais, dans l'exploitation qui est faite de ces activités avec les enfants, de trouver différentes décompositions intéressantes du nombre...

— **Importance de l'analycité**

Comment travailler cet aspect... qui consiste à supposer que le problème est résolu, que la chose cherchée est obtenue, pour de là considérer ce qui dérive de cette chose...? Ce mode de pensée différent peut-il être travaillé préalablement à l'algèbre, dans d'autres domaines?

— **Avantage éventuel de certaines procédures de résolution arithmétiques**

Les différents types de raisonnement arithmétique, présents chez les enfants, seraient ici à explorer comme profil d'entrée dans le passage à l'algèbre (essais-erreurs et calculs numériques successifs contrôlés; raisonnement s'articulant sur les relations et transformations connues...; dans les cas de problèmes multiplicatifs où il y a proportionnalité: raisonnements de type fausse position, utilisation de la règle de trois...).

Une fausse position dans les cas de situations non-proportionnelles (procédure qui au sens strict ne s'applique que dans les cas où il y a proportionnalité), dans laquelle l'élève aurait à s'interroger sur l'ajustement à faire après un essai infructueux, pourrait permettre à l'élève de réfléchir sur la structure du problème.

— **Une complexification nécessaire des problèmes présentés à l'élève**

Si les problèmes présentés à l'élève sont trop simples, ils seront résolus arithmétiquement. Il n'y verra, et avec raison, aucune nécessité de passer à l'algèbre. Il y a donc nécessité de choisir des problèmes suffisamment complexes (en termes des relations impliquées) pour voir la pertinence éventuelle de passer à l'algèbre. Les problèmes impliquant deux types de relations, relations multiplicatives et additives, pourraient être des exemples de tels problèmes. Ils obligent à une maitrise plus grande des relations en présence, ce qui est difficile à conduire arithmétiquement (cf. texte de S. Schmidt).

— **Importance de la géométrie dans le passage à l'algèbre**

Le langage géométrique présente des avantages quant au développement des habiletés à percevoir la mise en œuvre de propriétés générales. En effet, il permet d'une part de représenter les grandeurs dans des figures où leurs propriétés relatives sont perceptibles. D'autre part, les raisonnements sur ces figures ne sont généralement pas tributaires de la ou des dimensions absolues des composantes de la figure. Qu'une figure soit grande ou petite importe peu dans la mise en évidence des relations entre les diverses composantes de la figure. Ainsi peut s'effectuer un transfert de la généralité des raisonnements géométriques vers des raisonnements de nature davantage numérique. À certains égards, l'on peut donc considérer une figure géométrique comme une symbolisation d'une situation. Les représentations géométriques peuvent jouer le rôle d'une symbolisation intermédiaire susceptible de rendre l'élève conscient du niveau de généralité que l'on peut attribuer à un traitement symbolique.

— **L'algèbre comme outil de généralisation**

L'algèbre est aussi un outil de généralisation et de construction des connaissances mathématiques. Le développement de la pensée algébrique doit donc se faire en instaurant une certaine dialectique entre la construction de ces connaissances mathématiques (numériques, géométriques...) et l'apprentissage de l'algèbre.

— **Tenir compte de l'histoire scolaire dans la mise en place des situations**

Le rapport qu'entretient un élève avec une écriture symbolique est nécessairement marqué par ses expériences antérieures avec d'autres écritures symboliques. À l'école, les élèves sont souvent amenés à manipuler des symboles dénués pour eux de tout poids sémantique. Il en découle rapidement un souci qui se limite chez l'élève à jouer avec les symboles dans le seul but de reproduire une forme vers laquelle l'élève croit que le maître veut l'amener.

Au moment où l'élève prend contact pour la première fois avec le symbolisme algébrique, il faut tenir compte de son histoire scolaire et de ses expériences antérieures avec les représentations symboliques.

— **Critère de direction vectorielle et complétude, pour le choix de situations favorisant le passage de l'arithmétique à l'algèbre**

La direction vectorielle dans un problème consiste en la corrélation plus ou moins bonne entre l'ordre des énoncés du problème et celui de l'apparition des données dans l'équation. Plus les liens ou les données sont énoncés dans l'ordre où ils apparaissent dans l'équation plus la direction est vectorielle. La complétude s'applique plutôt au fait que pour construire la représentation algébrique, il faut parfois faire intervenir des choses qui ne sont pas dites dans le texte du problème. On pourrait peut-être parler d'implicite. Ainsi dire que Julio a 3,40$ en pièces de 5 cents et de 10 cents cache l'implicite que ce montant se décompose en 2 parties, correspondant aux montants en pièces de chaque sorte.

Comment utiliser ces critères de façon didactique: comment va-t-on décider qu'un problème est de direction vectorielle? de complétude...?

Certains membres proposent de tenir compte de ces critères de façon à proposer des problèmes avec direction vectorielle et complétude pour atténuer le passage entre l'arithmétique et l'algèbre, les débutants en algèbre devant commencer avec des problèmes qui ont une direction vectorielle et la complétude, ce avec quoi plusieurs sont en désaccord.

Remarque:

On peut se demander si les situations d'émergence reprises dans cette section servent à provoquer les changements conceptuels décrits à la section 2. Jusqu'où y a t-il ajustement entre les changements mentionnés au point 2, et les items du point 3 comme susceptibles de provoquer ces changements conceptuels?

Des exemplaires du présent document sont en vente à l'adresse suivante:

Centre Interdisciplinaire de Recherche sur
l'Apprentissage et le Développement en Education
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A,
Montréal, Québec
H3C 3P8

Publié par le Centre Interdisciplinaire de Recherche
sur l'Apprentissage et le Développement en Education
Université du Québec à Montréal
Conception graphique: Pierrette [illegible]